TS1ET-Chap 1 : NOMBRES COMPLEXES (1ère partie)

I- Les nombres complexes.

1. Introduction

L'équation $x + 7 = 6$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{N}$, mais elle en a dans un ensemble plus grand : $\mathbb{Z}$ ($x = -1$). De même, l'équation $3x = 1$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$, alors que dans un ensemble plus grand, $\mathbb{Q}$ par exemple, il y en a une : $x = 1/3$. Et puis, l'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Q}$; il faut chercher dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ pour en trouver.

Bref, quand une équation n'a pas de solutions, une démarche naturelle (et historique) consiste à en chercher dans un ensemble plus grand. Au stade de nos connaissances actuelles, l'ensemble numérique le plus grand que l'on a rencontré est $\mathbb{R}$. Pourtant, l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$...

On va donc, dans ce chapitre « construire ? » ou plutôt imaginer un ensemble plus grand que $\mathbb{R}$ dans lequel l'équation $x^2 + 1 = 0$ possède des solutions. On l'appellera $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes. Le principal élément de $\mathbb{C}$ sera noté **i** (**i** comme imaginaire). Le nombre **i** est tel que $\mathbf{i}^2 = -1$! L'équation ci-dessus possède alors deux solutions : $x^2 + 1 = 0$ équivaut à $x^2 - \mathbf{i}^2 = 0$ soit $(x - \mathbf{i})(x + \mathbf{i}) = 0$ donc $x = \mathbf{i}$ ou $x = -\mathbf{i}$.

2) Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

a) Définition.

On admet l'existence d'un nouvel ensemble, noté $\mathbb{C}$, de nombres appelés complexes tel que :

* Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2=-1$.
* Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a+ib$, où a et b sont des réels.
* $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent l'addition et la multiplication de $\mathbb{R}$, et qui suivent les mêmes règles de calcul.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

On note $z=a+ib$, avec a et b réels.

Cette écriture est dite **forme algébrique** du nombre complexe.

b) Vocabulaire:

Partie réelle et partie imaginaire:

$z=a+ib$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a est la partie réelle de z et b la partie imaginaire.

On note: $\text{Re}(z)=a$ et $\text{Im}(z)=b$.

Exemple avec $z=3+7i$. La partie réelle de z vaut 3 et la partie imaginaire de z vaut 7.

Re(z)=3 et Im(z)=7.

Dans l'écriture $z=a+ib$,

si $a=0$ alors $z=ib$: on dit que z est un imaginaire pur.

Si $b=0$ alors $z=a$: dans ce cas z est un réel.

Remarque : les nombres réels sont des nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle.

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Conjugué d'un nombre complexe:

Si z est le nombre complexe $a+ib$ alors le conjugué de z, noté $\bar{z}$ est le nombre complexe $a-ib$.

Exemple: Le conjugué de $z=2+7i$ est $\bar{z}=2-7i$. Le conjugué de $z=3-2i$ est $\bar{z}=3+2i$.

II. Règles de calcul:

Soient $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ deux nombres complexes (avec a, b, a', b' réels).
Les calculs se font comme dans ℝ, avec la particularité $\boxed{i^2 = -1}$**.**

1) Addition de deux nombres complexes:
$z+z' = (a+a')+i(b+b')$
Application : $(2-5i)+(-3+7i) = (2-3)+(-5i+7i) = -1+2i$
Exercice 2 : $(11-i)+(4-6i) =$ $\qquad$ $4{,}5i+2i-4+7i =$

2) Multiplication d'un complexe par un réel k :
$z' = kz = k(a+ib) = ka+ikb$
Application : $2(5-3i) = 10-6i$
Exercice 3 : soient $z_1 = -2+5i$, $z_2 = 3$, $z_3 = i$.
Calculer : $z_4 = 2z_1 - z_2$, $z_5 = -z_1 + 5z_2 - 10(z_2+z_3)$.

3) Produit de deux nombres complexes :
Exemples : $(2+3i)(5-7i) = 10-14i+15i-21i^2 = 10-14i+15i-21\times(-1) = 10-14i+15i+21 = 31+i$
$(2+3i)^2 = 2^2+2\times2\times(3i)+(3i)^2 = 4+12i+9i^2 = 4+12i+9\times(-1) = 4-9+12i = -5+12i$
$i^3 = i^2\times i = (-1)\times i = -i$

Exercice 4 : a) calculer i^4 , i^5
b) soient $z_1 = -2+5i$, $z_2 = 3-i$; calculer $z_1\times z_2$, z_1^2 , z_2^3

4) Calculs avec le conjugué: $z = a+ib$ et $\bar{z} = a-ib$
$z+\bar{z} = 2\times \mathrm{Re}(z) = 2a$ $\qquad$ $z-\bar{z} = 2i\times \mathrm{Im}(z) = 2ib$
$z\times\bar{z} = a^2+b^2$ cette dernière égalité s'écrit $(a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$ (*)

Exercice 5 : a) Démontrer l'égalité (*).
b) Utiliser (*) pour donner rapidement les résultats des produits :
$(2+5i)(2-5i)$ $\qquad$ $(-3+4i)(-3-4i)$ $\qquad$ $(1-3i)(1+3i)$ $\qquad$ $(2+i)(2-i)$

5) Inverse d'un nombre complexe z non nul : Il existe un unique nombre complexe z' tel que $zz' = 1$.
z' est appelé inverse de z et est noté $\frac{1}{z}$.
Exemple : Ecrire $\frac{1}{2-i}$ sous la forme algébrique.
Méthode : On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{1}{2-i} = \frac{1\times(2+i)}{(2-i)\times(2+i)} = \frac{2+i}{2^2+1^2} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5}+\frac{1}{5}i .$$

6) Quotient de deux nombres complexes :
Exemple : Ecrire $\frac{1-5i}{2+3i}$ sous la forme algébrique.
Méthode : On multiplie le numérateur et le dénominateur de la fraction par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{1-5i}{2+3i} = \frac{(1-5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{2-3i-10i+15i^2}{2^2+3^2} = \frac{2-3i-10i-15}{13} = \frac{-13-13i}{13} = -1-i .$$

Exercice 6 : a) calculer $\frac{1}{i}$ sous forme algébrique.
b) soient $z_1 = -2+5i$ **,** $z_2 = 3-i$ **;** calculer $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_2}$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$ et $\frac{1}{z_2^2}$ sous forme algébrique.

III – Résolution des équations de degré 2 $az^2+bz+c=0$ ($a\neq 0$) avec Δ négatif

<u>1) Equations simples $z^2=a$ avec a réel</u>

* Rappeler les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $z^2=4$, puis de l'équation $z^2=3$.

* Considérons l'équation $z^2=-1$; cette équation admet-elle des solutions dans $\mathbb{R}$? Et dans $\mathbb{C}$? Vérifier que $z^2+1=(z-i)(z+i)$; en déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2=-1$.

* Donner de même les solutions de chacune des équations $z^2=-4$ et $z^2=-9$ dans $\mathbb{C}$.

* Compléter l'encadré :

L'équation $z^2=a$ a pour solution(s) dans $\mathbb{C}$: - …...... si $\boxed{a=0}$; - …......... et ...…....... si $\boxed{a>0}$; - …...........et ….......... si $\boxed{a<0}$. Les solutions sont ici des..

<u>2) Equations $az^2+bz+c=0$ avec a, b et c réels $(a\neq 0)$</u>

1) Rappeler les solutions de l'équation $az^2+bz+c=0$ dans le cas où le discriminant Δ est positif ou nul.

2) On admettra pour la suite le théorème suivant :

L'équation $az^2+bz+c=0$ admet deux solutions complexes dans le cas où le discriminant Δ est strictement négatif, qui s'écrivent $z_1=\alpha+i\beta$ et $z_2=\alpha-i\beta$ avec $\alpha=\dfrac{-b}{2a}$ et $\beta=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ Ces solutions sont …................................

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2-6z+10=0$ b) $2x^2-3x+4=0$ c) $z^2-z+1=0$

IV- Représentation géométrique des nombres complexes

1) Propriété et définitions :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$)Le nombre complexe $a+\mathrm{i}\,b$ (avec a et b réels) est représenté par le point $M(a\,;b)$.

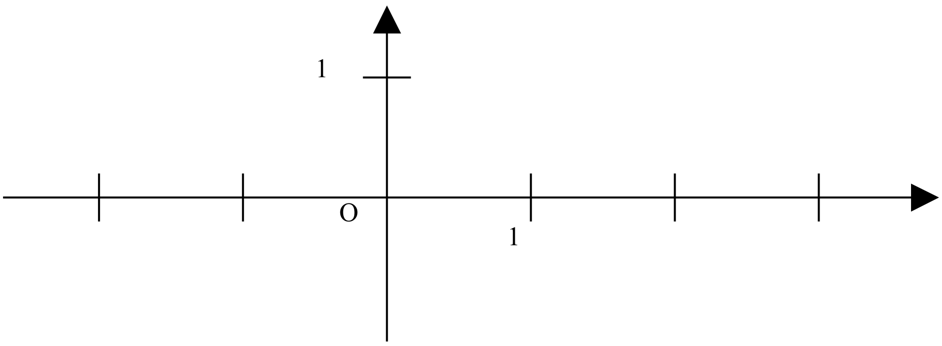
On dit que le point $M(a\,;b)$ a pour **affixe** $z_M=a+\mathrm{i}\,b$ ou par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

que $z_M=a+\mathrm{i}\,b$ a pour **image** $M(a\,;b)$ ou

que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a pour **affixe** $z_{\overrightarrow{OM}}=a+\mathrm{i}\,b$

exemples :

Nombre complexe z	**Abscisse du point image**	**Ordonnée du point image**
$z_A=3$		
$z_B=-2$		
$z_C=i$		
$z_D=1+i$		
$z_E=-1+i$		



Exercices :

Exercice 1 :

a) compléter :

$z_1=5+3\mathrm{i}$ a pour image $M_1(...;...)$;

$z_2=5-2\mathrm{i}$ a pour image $M_2(...;...)$;

$z_3=2\mathrm{i}$ a pour image $M_3(...;...)$; M_3 appartient à l'axe des …............... : axe des imaginaires purs.

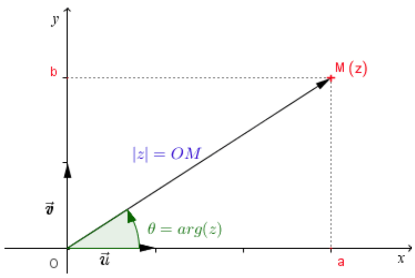
$z_4=-10$ a pour image $M_4(-10;0)$; M_4 appartient à l'axe des …..................... : axe des réels.

Exercice 2 : Soit M le point d'affixe $z_M=2+3\mathrm{i}$; représenter les points M_1 d'affixe $\bar{z}$, M_2 d'affixe $-z$ et M_3 d'affixe $-\bar{z}$; Remarques ?

2) Module et argument d'un nombre complexe :

a) Définitions :

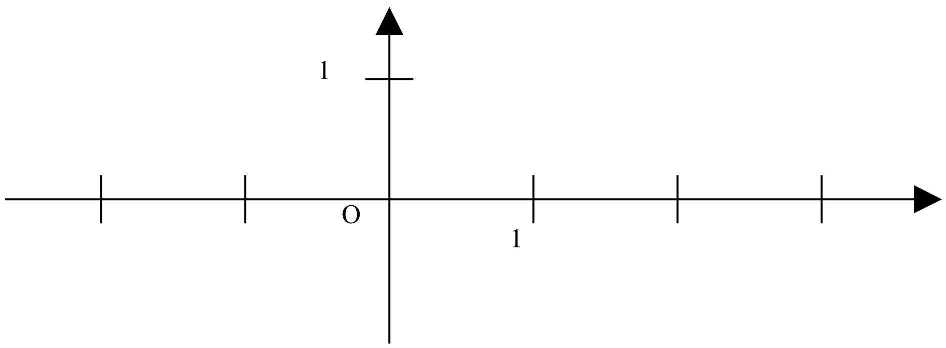
Soit M un point d'affixe z dans le plan complexe $(O;\vec{u},\vec{v})$.



Définition du module de z :	Le module r de z est égal à la distance OM. On le note $\lvert z\rvert=r=OM$ avec M d'affixe z .
Définition d'un argument de z , z≠0	On appelle argument de z, $z\neq0$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$. On note : $arg(z) = (\vec{u};\overrightarrow{OM})$

Exercice 5 : Dans chaque cas, représenter le nombre complexe dans le plan complexe et donner le module et un argument de ce nombre :

Nombre complexe z	Module de z	Un argument de z
$z_A=3$		
$z_B=-2$		
$z_C=i$		
$z_D=1+i$		
$z_E=-1+i$		



b) Calculs : si $z=a+ib$ $(z\neq0)$, a et b réels

Pour calculer le module :	$r=\lvert z\rvert=\sqrt{a^2+b^2}$
Pour déterminer un argument :	on calcule : $\cos\theta=\frac{a}{r}$ **et** $\sin\theta=\frac{b}{r}$ et on détermine θ à l'aide du cercle trigonométrique ou de la calculatrice

Exercice 6 : déterminer le module et un argument de $z_1=2\sqrt{3}+2i$, $z_2=-2-2i$ et $z_3=5+3i$
(on donnera $arg(z_3)$ en degrés à 1 degré près).

Exercice 7 : Soient A d'affixe $z_A=2-3i$ et B d'affixe $z_A=5-i$ deux points dans le plan complexe. Calculer les distances OA et AB, ainsi que le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}$; qu'en déduire pour le triangle OAB ?

4) Forme trigonométrique :

Soit $z=a+bi$ un nombre complexe non nul (a et b réels non tous deux nuls)
Soient r et θ respectivement le module et un argument de z.

On sait que : $a=r\cos\theta$ et $b=r\sin\theta$ donc $z=a+ib=r\cos\theta+ir\sin\theta=r(\cos\theta+i\sin\theta)$.

a)Définition : $\boxed{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ \textbf{avec}\ r>0\ \textbf{et}\ \theta\ \textbf{réel est la forme trigonométrique de}\ z}$

Remarques :
La forme trigonométrique est parfois notée [r ; θ]
La forme trigonométrique est unique à 2π près.
0 n'a pas de forme trigonométrique.

Exemples :

Nombre complexe	Forme trigonométrique
$z_A=3$	
$z_B=-2$	
$z_C=i$	
$z_D=1+i$	
$z_E=2\sqrt{3}-2i$	
$z_F=2\cos\frac{\pi}{3}+2i\sin\frac{\pi}{3}$	

b) Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :

$\boxed{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\cos\theta+ir\sin\theta=a+ib}$ avec $a=r\cos\theta$ et $b=r\sin\theta$.

Exercice 8 : Déterminer la forme algébrique de $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ et $z_2=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

5) Module et argument d'un produit et conséquences :

a) propriété :

- le module d'un produit est le produit des modules :
  $|zz'|=|z|\times|z'|$ pour tous nombres complexes z et z'.
- L'argument d'un produit est la somme des arguments :
  $arg(zz')=arg(z)+arg(z')$ $[2\pi]$ pour tous nombres complexes z et z' non nuls.

b) Conséquences :

- $\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$ et $arg\left(\frac{1}{z}\right)=-arg(z)$ pour tout nombre complexe z non nul.

- $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$ et $arg\left(\frac{z}{z'}\right)=arg(z)-arg(z')$ pour tous nombres complexes z et z' non nuls.

- $|z^n|=|z^n|$ et $arg(z^n)=n\,arg(z)$ pour tout nombre complexe z non nul et tout entier n.

V - Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définitions et Conséquences

$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$ pour tout réel θ
Soit z un nombre complexe non nul. Soient r et θ respectivement le module et un argument de z. $r\,e^{i\theta}$ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=r\,e^{i\theta}$ **avec** $r>0$ **et** θ **réel est la forme exponentielle de z**

Exemples à connaître : $e^{i0}=$ $e^{i\frac{\pi}{2}}=$ $e^{-i\frac{\pi}{2}}=$ $e^{i\pi}=$

Exercice 9 :

1) Donner la forme exponentielle des exemples du 5).

2) a) Donner module et argument de $z_1=2e^{i\frac{\pi}{6}}$, de $z_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}$, de $z_3=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et de $z_4=e^{i\pi}$

b) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes précédents.

3) $z=-2e^{i\frac{\pi}{3}}$ est-il sous-forme exponentielle ? Si non, le mettre sous forme exponentielle.

Propriétés :

r et r' étant deux réels positifs : **1)** $r\,e^{i\theta}r'\,e^{i\theta'}=$ **2)** $\frac{1}{r\,e^{i\theta}}=$	**3)** $\frac{r\,e^{i\theta}}{r'\,e^{i\theta'}}=$ **4)** $(r\,e^{i\theta})^n=$

Exercice 10 :Avec l'énoncé de l'ex 12 2), calculer les formes exponentielles de z_1z_3, z_3z_4, z_1z_4, $\frac{z_1}{z_3}$, $\frac{z_4}{z_1}$, $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_3}$, z_1^2, z_4^2, z_2^3 et z_3^3.