Chapitre : Lois à densité

I. Introduction

Les v.a. étudiées jusqu'à présent étaient dites discrètes (elles prenaient un nombre fini de valeurs). Il existe des v.a. non discrètes, qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Pour connaître la loi d'une v.a. discrète, il suffit de connaître toutes les probabilités $P(X=x_i)$ où x_i sont les valeurs prises par X.

Pour une v.a. continue il en est tout autre car pour n'importe quelle valeur possible, $P(x=a)=0$.

Dans ce dernier cas, on introduit la fonction densité de probabilité de X qui va définir la loi de X.

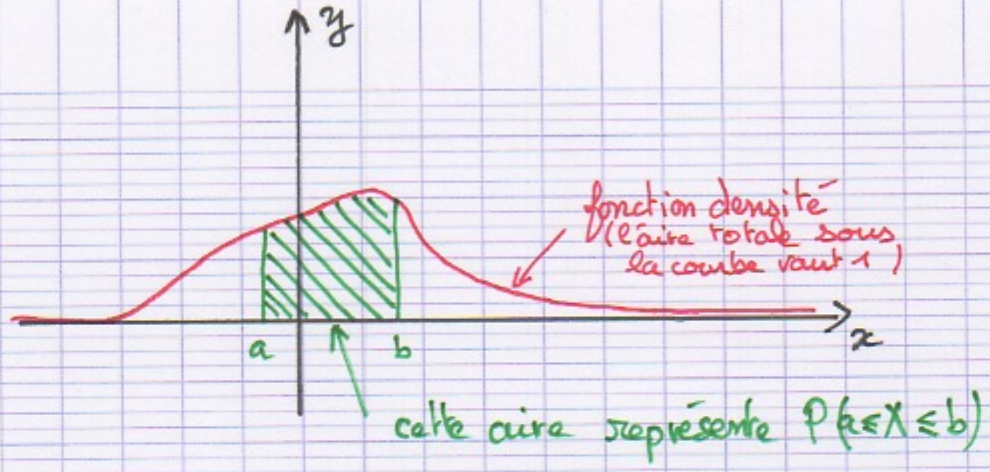
<u>définition</u> : Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction densité de probabilité lorsque :

- f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
- L'aire totale sous la courbe vaut 1 (ce qu'on peut aussi exprimer par : $\int_I f(x)dx = 1$ où I est l'intervalle des valeurs prises par X)

Lorsqu'une v.a. continue est définie par sa densité alors :

$$P(a \leq X \leq b) = \text{aire hachurée de la figure suivante}$$
$$= \int_a^b f(x)dx .$$

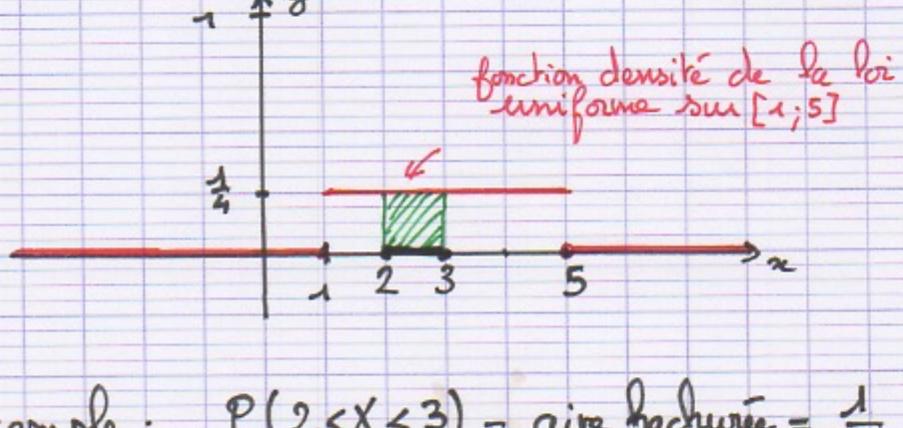
Illustration



II. Loi uniforme sur [a,b]

Définition : Une v.a. X suit la loi uniforme sur $[a;b]$ lorsque sa fonction densité est constante sur $[a,b]$ et nulle ailleurs. Dans ce cas, sur $[a;b]$, elle vaut $\frac{1}{b-a}$

figure :



Par exemple : $P(2 \leq X \leq 3) =$ aire hachurée $= \frac{1}{4}$

propriété : Si X suit la loi uniforme sur $[a;b]$

alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $\underbrace{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}_{\text{peu utilisé}}$

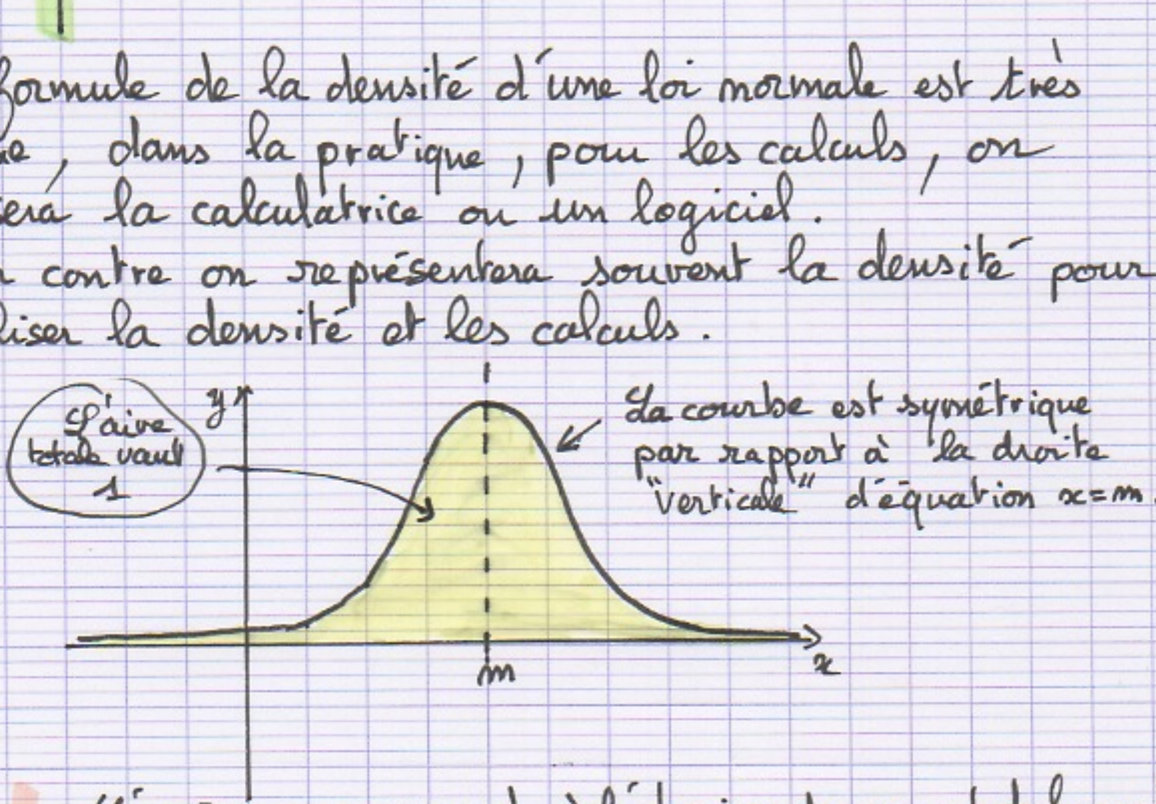
III - Loi normale

Définition : Une v.a. X suit la loi normale de moyenne m et d'écart-type σ (On note : X suit $\mathcal{N}(m,\sigma)$) lorsque sa fonction densité est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{2}\right)^2}$$

La formule de la densité d'une loi normale est très complexe, dans la pratique, pour les calculs, on utilisera la calculatrice ou un logiciel.

Par contre on représentera souvent la densité pour visualiser la densité et les calculs.



- L'espérance correspond à l'abscisse du sommet de la courbe
- Plus l'écart type est grand, plus la courbe est étalée.
- $E(X) = m$ et $\sigma(X) = \sigma$.

Pour les calculs, on utilisera la calculatrice, elle donnera :

$$P(a \leq X \leq b)$$

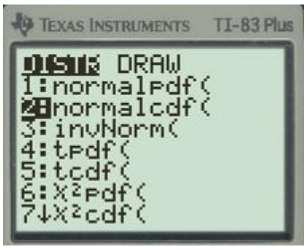
Voir feuilles jointes pour l'utilisation de T.I. ou Casio.

Loi normale et calculatrice TI 82 et 83
2011/2012 – IREM Aix-Marseille – Groupe Stat Proba

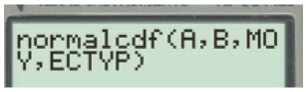
1) Pour Calculer P(a<X<b)

a) Sélectionner le menu des distributions des lois de probabilités 2nd + DISTR.

b) Sélectionner normalcdf (ou normalFRép suivant les modèles).



c) Compléter les paramètres.



Exemple :
Lorsque X suit une loi normale de moyenne m = 58 et d'écart type $\sigma = 6$.
P(52<X<64) = normalcdf (52,64,58,6)≈ $\boxed{0,68269}$

Remarque :
La fonction normalpdf correspond aux valeurs prises par la fonction de densité alors que normalcdf correspond à l'aire sous la courbe.

2) Pour Calculer P(X<b)

On calculera une valeur approchée en calculant P(a<X<b) avec a = – 10^{99} par exemple.

Exemple :
Lorsque X suit une loi normale de moyenne m = 58 kg et d'écart type $\sigma = 6$ kg.
P(X<50) = normalcdf (-10^99,50,58,6)≈ $\boxed{0,912113}$

3) Pour Calculer P(X>a)

On calculera une valeur approchée en calculant P(a<X<b) avec b = 10^{99} par exemple.

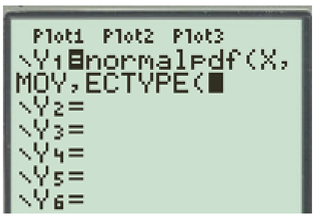
4) Pour calculer a tel que P(X<a) = k (où k est un nombre donné entre 0 et 1.)

Dans le menu DISTR, on sélectionne invNorm ou FracNormale (suivant les modèles)

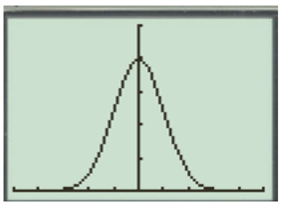
Exemple :
X suit une loi normale de moyenne 58 et d'écart type 6. Déterminer a tel que P(X<a) = 0,35.
a = FracNormale (0,35,58,6) ≈ $\boxed{55,688}$

5) Pour représenter graphiquement une loi normale :

Afficher l'écran d'édition puis dans le menu DISTR sélectionner normalpdf(

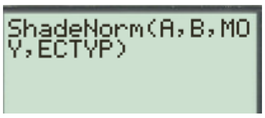


Penser à régler la fenêtre d'affichage

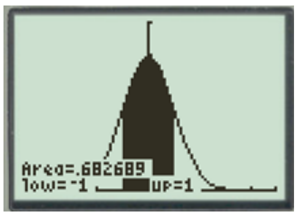


6) Pour représenter graphiquement P(a<X<b):

Dans le menu DISTR, sélectionner DRAW ou DESSIN, puis Ombre Norm(



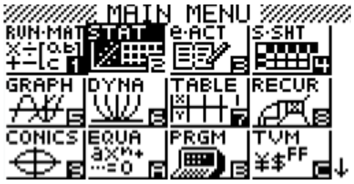
Penser à régler la fenêtre d'affichage



Loi normale et Calculatrices Casio

1) Pour Calculer P(a<X<b)

a) Mode STAT

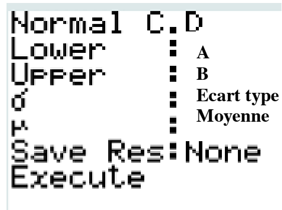


b) Au bas de l'écran s'affiche :

Sélectionner DIST puis NORM

et enfin Ncd

c) Compléter les paramètres.



Remarque :
La fonction Npd permet d'obtenir les valeurs prises par la fonction de densité et Ncd correspond à l'aire sous la courbe.

2) Pour Calculer P(X<b)

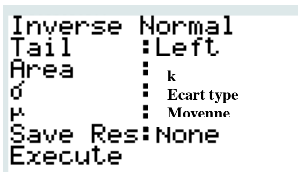
On calculera une valeur approchée en calculant P(a<X<b) avec $a = -10^{99}$ par exemple.

3) Pour Calculer P(X>a)

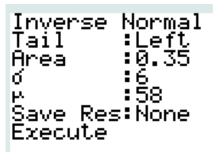
On calculera une valeur approchée en calculant P(a<X<b) avec $b = 10^{99}$ par exemple.

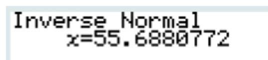
4) Pour calculer a tel que P(X<a) = k (où k est un nombre donné entre 0 et 1.)

En mode STAT, sélectionner le menu DIST puis NORM puis InvN

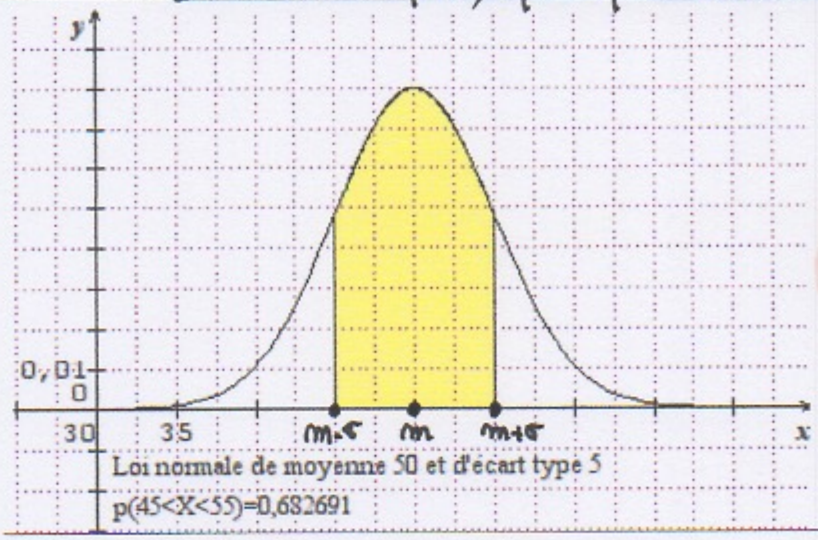


Exemple :
X suit une loi normale de moyenne 58 et d'écart type 6. Déterminer a tel que P(X<a) = 0,35.
On trouve a ≈ $\boxed{55{,}688}$



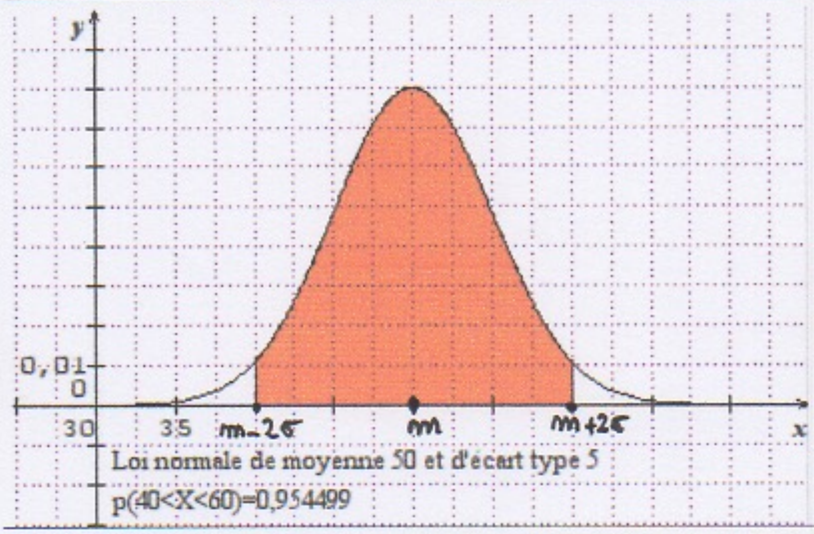


On constate que, quel que soit m et σ on a :



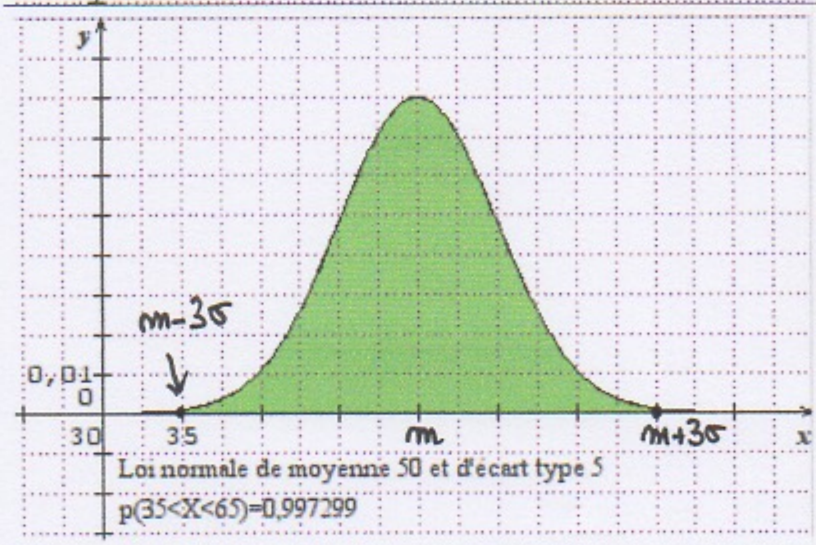
$$\boxed{P(m-\sigma \leqslant X \leqslant m+\sigma) \approx 0{,}68}$$

Cela signifie que 68% des valeurs prises par X sont dans l'intervalle : $[m-\sigma\,;\,m+\sigma]$



$$\boxed{P(m-2\sigma \leqslant X \leqslant m+2\sigma) \approx 0{,}95}$$

Cela signifie que 95% des valeurs prises par X sont dans l'intervalle : $[m-2\sigma\,;\,m+2\sigma]$



$$\boxed{P(m-3\sigma \leqslant X \leqslant m+3\sigma) \approx 0{,}997}$$

Cela signifie que 99,7 % des valeurs prises par X sont dans l'intervalle : $[m-3\sigma\,;\,m+3\sigma]$

IV - Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Propriété : Si la v.a. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ alors $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ (avec $q = 1-p$)
Lorsque n est suffisamment grand, alors la loi binomiale peut être approchée par une loi normale de même espérance et de même écart type :

$$\mathcal{N}\left(m = np \,;\, \sigma = \sqrt{npq}\right)$$

En pratique, l'approximation sera valable dès que $n \geqslant 30$.

V - Espérance, variance : quelques formules

La notion d'indépendance de variables aléatoire est difficile. On se tiendra à la définition suivante :

Deux v.a. sont dites indépendantes quand le résultat de l'une n'influence pas celui de l'autre.

propriétés : Si X et Y sont deux v.a. et $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

- $E(aX+b) = aE(X) + b$
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X-Y) = E(X) - E(Y)$
- $V(aX+b) = a^2 V(X)$

<u>propriétés</u> : $\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendante :} \\ V(X+Y) = V(X) + V(Y) \\ V(X-Y) = V(X) + V(Y) \end{array}}$

VI. Théorème de la limite centrée

Soient $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ n v.a. <u>indépendantes</u> de même loi de probabilité, de même espérance m et d'écart type σ.

Lorsque n est suffisamment grand :

* La v.a. $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit approximativement une loi normale d'esperance $n.m$ et d'écart type $\sqrt{n}.\sigma$., notée $\mathcal{N}(n \times m ; \sqrt{n}\sigma)$

* La v.a. $Y_n = \frac{S_n}{n}$ converge vers une v.a. Y de loi normale : $\mathcal{N}\left(m ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$