Classe: TS2ET	Date: 3/10/2018	**Type**
Devoir n°2		**Devoir surveillé**
Thème: Equations différentielles.		

Exercice 1

Soit (E) l'équation différentielle:

$$x' - x = 5$$

dans laquelle x est une fonction de la variable t, dérivable sur ℝ, et où x' est la fonction dérivée de x.

1°) Résoudre dans ℝ l'équation différentielle (E_0) :

$$x' - x = 0$$

2°) Déterminer une constante solution particulière de l'équation différentielle (E).

3°) Déduire des deux questions précédentes l'ensemble des solutions de (E).

4°) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0)=1.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E) : $x'' - 3x' - 4x = -5e^{-t}$

où x est une fonction de sa variable t, définie et deux fois dérivable sur ℝ.

1°) Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $x'' - 3x' - 4x = 0$.

2°) Soit h la fonction définie sur ℝ par $h(t) = te^{-t}$.

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3°) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4°) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : f(0)=2 et f'(0)=-1

Devoir n°2 (TS$_2$ ET)

Exercice 1

1°) D'après le cours, les solutions de l'équation : $x'(t)-x(t)=0$ $(a=1 ; b=-1)$ sont les fonctions :

$$x_0(t)=ke^{-\frac{b}{a}t}=\boxed{ke^{+t}} \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}$$ (3)

2°) On remarque que la fonction constante $x_1(t)=-5$ est solution car dans ce cas :

$$x_1'(t)-x_1(t)=0-(-5)=5.$$ (2)

3°) On sait alors que l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions :

$$\boxed{x(t)=ke^{t}-5} \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}$$ (2)

4°) f est une solution de (E), donc $f(t)=ke^{t}-5$

Or $f(0)=1$ s'écrit : $ke^0-5=1$

$\Leftrightarrow k=1+5 \Leftrightarrow k=6.$

Donc $\boxed{f(t)=6e^{t}-5}$ (2)

Exercice 2

1°) L'équation (E_0) est une équation différentielle du 2nd ordre sans second membre. Son équation caractéristique s'écrit :

$$r^2-3r-4=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times1\times(-4)=9+16=25$$ (1)

Il y a deux solutions réelles :

$$\begin{cases} r_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3-5}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \\[2ex] r_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{3+5}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \end{cases}$$ (1)

On sait alors que les solutions s'écrivent : 2

$$\boxed{x_0(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{4t}}$$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_2 \in \mathbb{R}$

2°) Vérifions que $h(t) = te^{-t}$ est une solution de (E). Pour cela il faut montrer que : $h''(t) - 3h'(t) - 4h(t) = -5e^{-t}$.

<u>Calculons</u> : $h(t) = te^{-t} = u.v$ avec $u = t$ $v = e^{-t}$

$h'(t) = u'v + uv' = 1 \times e^{-t} + t \times (-e^{-t})$

$= e^{-t} - te^{-t} = (1-t)e^{-t} = u.v$ avec $\begin{cases} u = 1-t \\ v = e^{-t} \end{cases}$

$h''(t) = u'v + uv'$

$= -1 \times e^{-t} + (1-t) \times (-e^{-t})$

$= -e^{-t} - e^{-t} + te^{-t} = (-2+t)e^{-t}$

Ainsi $h''(t) - 3h'(t) - 4h(t) = (-2+t)e^{-t} - 3(1-t)e^{-t} - 4te^{-t}$

$= -2e^{-t} + \cancel{te^{-t}} - 3e^{-t} + \cancel{3te^{-t}} - \cancel{4te^{-t}}$

$= -5e^{-t}$

CQFD. 3

Donc $h(t)$ est bien solution de (E)

3°) D'après le cours, les solutions de (E) sont :

$$\boxed{x(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{4t} + te^{-t}}$$ $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_2 \in \mathbb{R}$ 2

4°) f est une solution, donc $f(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{4t} + te^{-t}$

<u>et</u> $f'(t) = -k_1 e^{-t} + 4k_2 e^{4t} + e^{-t} - te^{-t}$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 = 2 \\ -k_1 + 4k_2 + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 2 - k_2 \\ -2 + k_2 + 4k_2 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 2 \\ k_2 = 0 \end{cases}$$ <u>donc</u> $$\boxed{f(t) = 2e^{-t} + te^{-t}}$$ 2