Exercice3

Les parties **A, B, C** de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A :

On étudie un circuit RC série constitué d'un condensateur de capacité $C = 1$ farad associé à une résistance ajustable R (appelée aussi rhéostat).
R doit donc être considérée comme un paramètre strictement positif (exprimé en ohm).
Le temps t est mesuré en seconde.

À l'instant $t = 0$, l'ensemble du montage est soumis à une tension constante de 12 volts.
La tension, en volt, $u_C(t)$ aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle :

$$(E): \qquad RCy'(t) + y(t) = 12.$$

1. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme d'une constante.
2. **a.** Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) :

$$(E_0): \qquad RCy'(t) + y(t) = 0.$$

   b. En déduire les solutions de l'équation (E).
   On rappelle

Equation différentielle	Solutions
$ay'(t) + by(t) = 0$, avec a et b des constantes réelles, $a \neq 0$.	$y : t \mapsto K\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$, avec K constante réelle.

3. On considère que la tension aux bornes du condensateur à l'instant $t = 0$ est nulle, c'est à dire : $u_C(0) = 0$.
   Déterminer $U_C(t)$ en fonction de R et de t.
4. On souhaite que la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur atteigne 11 volts au bout de 10 secondes.
   Quelle est la valeur de R permettant de réaliser cela ? Arrondir à 10^{-2}.

Partie B :

La fonction échelon $\mathcal{U}$ est définie par : $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$

On rappelle les résultats suivants concernant la transformation de Laplace où f est une fonction ayant pour transformée de Laplace F :

Fonction	Transformée de Laplace de la fonction
$t \mapsto \mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p}$
$t \mapsto t\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto \dfrac{1}{p^2}$
$t \mapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, $a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto \dfrac{1}{p+a}$
$t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, $a \in \mathbb{R}$	$p \mapsto F(p+a)$
$t \mapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$	$p \mapsto pF(p) - f\left(0^+\right)$

On étudie un circuit RC série constitué d'un condensateur de capacité $C = 1$ farad et d'une résistance $R = 1$ ohm.
La tension d'entrée e (en volt) est définie en fonction du temps t (en seconde) par :

$$e(t) = 4t\mathrm{e}^{-2t}\mathcal{U}(t).$$

Il s'agit d'une rampe atténuée.
La tension de sortie $s(t)$ (exprimée en volt), prise aux bornes du condensateur à l'instant t, vérifie :

$$(E_1) : \qquad s'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0) = 0.$$

1. On souhaite étudier les variations de e sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   Un logiciel de calcul formel a donné le résultat suivant :

   $$e'(t) = \mathrm{e}^{-2t}(4 - 8t).$$

   En déduire le sens de variations de e sur $[0\ ;\ +\infty[$. Justifier.
2. Déterminer la transformée de Laplace $E(p)$ de la tension d'entrée $e(t)$.
3. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité (E_1), démontrer que :

   $$S(p) = \frac{4}{(p+2)^2(p+1)}.$$

4. Un logiciel de calcul formel fournit la décomposition suivante :

1	ÉlémentsSimples$\left(\dfrac{4}{(p+2)^2(p+1)}, p\right)$ $\to \dfrac{4}{p+1} - \dfrac{4}{(p+2)^2} - \dfrac{4}{p+2}$

   En déduire l'expression de $s(t)$ en fonction de t et de $\mathcal{U}(t)$.
5. La tension de sortie $s(t)$ est représentée en fonction de t sur le document réponse.
   Estimer graphiquement pendant combien de temps la tension de sortie est supérieure ou égale à $0,25$ volt.

Partie C :

Une société produit et commercialise des résistances de 500 ohms.

1. Le procédé de fabrication entraine des variations au niveau de la valeur de chaque résistance produite. On admet que la valeur en ohm d'une résistance produite peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 10$.
   Pour qu'une résistance soit conforme, sa valeur doit être comprise entre 485 Ω et 515 Ω.
   a. On considère une résistance prise au hasard dans la production.
   Quelle est la probabilité que cette résistance soit conforme ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.
   b. L'entreprise améliore la qualité de sa production en adaptant le procédé de fabrication. Cela modifie la valeur de σ sans changer la valeur de μ.
   Quelle est la plus grande valeur décimale à un chiffre après la virgule que peut avoir σ pour que 95 % au moins des résistances produites soient conformes ? Expliquer la démarche.

2. La société commercialise les résistances produites par lot de 200.

On considère que la production est assez importante pour que la constitution d'un lot de 200 soit assimilable à 200 tirages avec remise.

On admet que 5 % des résistances produites sont non conformes.

On note Y la variable aléatoire qui associe à chaque lot de 200 résistances le nombre de résistances non conformes que contient le lot. On admet que Y suit une loi binomiale de paramètres n et p.

a. Donner les valeurs de n et p.

b. Calculer $P(Y = 10)$. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Un client peut renvoyer un lot s'il contient au moins 15 résistances non conformes.

Calculer la probabilité qu'un lot, choisi au hasard parmi les lots commercialisés, puisse être renvoyé ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.

3. Pour améliorer la satisfaction de ses clients, la société met en place un contrôle qualité avant de commercialiser les résistances. On rappelle que 5 % des résistances fabriquées sont non conformes.

Le contrôle qualité permet de rejeter 80 % des résistances non conformes. Mais malheureusement, lors de ce contrôle, 10 % des résistances conformes sont également rejetées.

On choisit au hasard une résistance dans la production.

On note :

- C l'évènement « la résistance choisie est conforme » ;
- R l'évènement « la résistance choisie est rejetée par le contrôle qualité ».

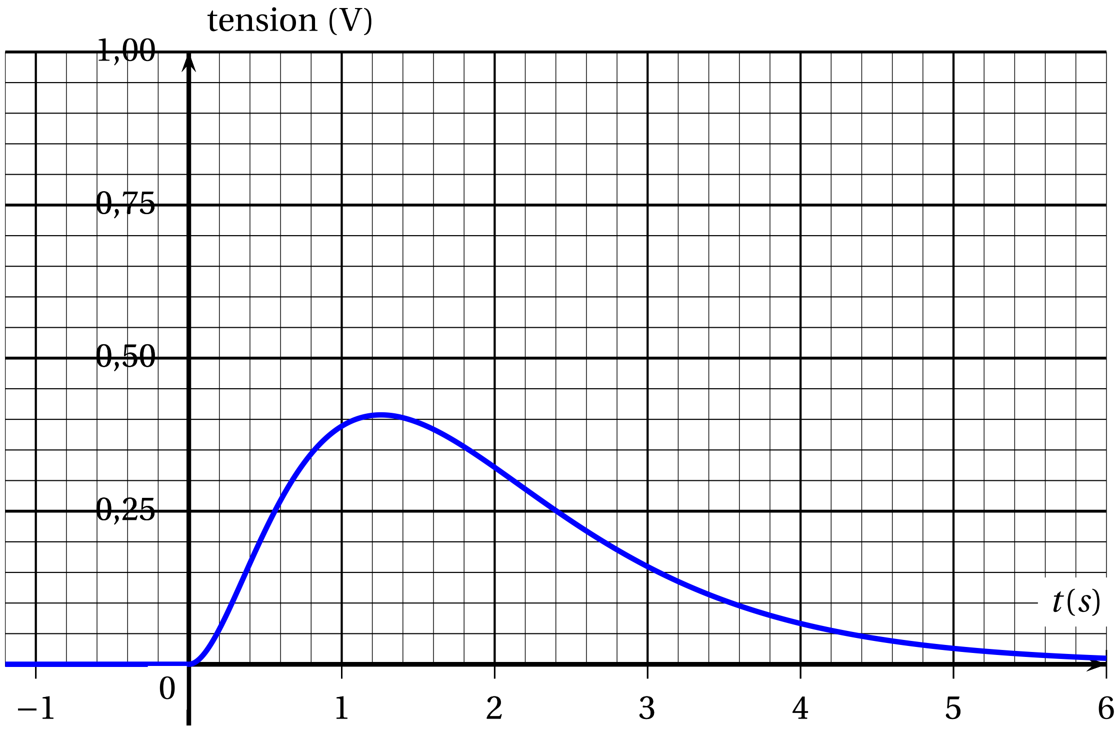
a. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

b. Quelle est la probabilité qu'une résistance soit rejetée lors du contrôle qualité ?

c. Une résistance est choisie au hasard parmi les résistances non rejetées par le contrôle qualité.

Quelle est la probabilité qu'elle soit conforme ? Arrondir la réponse à 10^{-3}.

Partie B 5. : Représentation graphique de la tension de sortie s



Exercice 3

PARTIE A :

1°) Si $y(t) = C^{te}$, alors $y'(t) = 0$

L'équation s'écrit alors : $0 + C^{te} = 12$

Donc $C^{te} = 12$

conclusion : Une solution particulière est : $\boxed{y(t) = 12}$

2°) a) On cherche une solution de l'équation sans second membre :

$$RC\,y'(t) + y(t) = 0$$

On sait qu'elle s'écrira sous la forme :

$$y(t) = Ke^{-\frac{b}{a}t} \quad \text{où } a = RC \text{ et } b = 1.$$

Donc $\boxed{y(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t}}$

b) La solution générale de (E) s'écrit comme somme de la solution générale de (E_0) avec un solution particulière de (E). (cours)

Donc la solution générale de (E) s'écrit :

$$\boxed{y(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t} + 12}$$

3°) $u_C(t)$ est solution de (E). On sait donc que :

$$u_C(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t} + 12$$

De plus, $u_C(0) = 0$ donc $Ke^{0} + 12 = 0$

donc $K + 12 = 0$

d'où $K = -12$

On en déduit que : $U_C(t) = -12e^{-\frac{1}{RC}t} + 12$

4°) On veut que $U_C(10) = 11$

Donc $-12e^{-\frac{1}{RC}t} + 12 = 11$

c'est-à-dire : $-12e^{-\frac{1}{RC}\times 10} + 12 = 11$

d'où $-12e^{-\frac{1}{RC}\times 10} = -1$

ainsi :

$$e^{-\frac{10}{RC}} = \frac{1}{10}$$

Donc $-\frac{10}{RC} = \ln\left(\frac{1}{10}\right)$

$$-\frac{10}{RC} = -\ln(10)$$

$$\frac{RC}{10} = \frac{1}{\ln(10)}$$

$$R = \frac{10}{\ln(10) \times C}$$

or $C = 1$, donc $R = \frac{10}{\ln(10)} \simeq 4{,}34$ à 10^{-2} près

Partie B

1°) On sait que $e'(t) = e^{-2t}(4-8t)$

Les variations de $e(t)$ sont données par le signe de $e'(t)$

or : $e'(t) = e^{-2t}(4-8t)$

Donc $e'(t)$ est du signe de $4-8t$ car $e^{-2t} > 0$

Ainsi $e'(t) > 0 \iff (4-8t) > 0$

$\iff 4 > 8t \iff \frac{1}{2} > t \iff t < \frac{1}{2}$

et $e'(t) < 0 \iff 4 - 8t < 0$

$\iff 4 < 8t$

$\iff \frac{1}{2} < t \iff t > \frac{1}{2}$

D'où les variations de $e(t)$

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$e'(t)$		$+$	0	$-$	
$e(t)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

$e(\frac{1}{2}) = 4 \times \frac{1}{2} U(\frac{1}{2}) = 2$

2°) $E(p) = \mathcal{L}(e(t)) = \mathcal{L}(4te^{-2t}U(t))$

$= 4 \times \mathcal{L}(te^{-2t}U(t))$

$= 4 \times F(p+2)$ (formulaire) avec $F(p) = \mathcal{L}(tU(t)) = \frac{1}{p^2}$

$= \frac{4}{(p+2)^2}$

3°) On a : $s'(t) + s(t) = e(t)$

donc $\mathcal{L}(s'(t)) + \mathcal{L}(s(t)) = \mathcal{L}(e(t))$

d'où : $pS(p) - s(0^+) + S(p) = \frac{4}{(p+2)^2}$ avec $s(0^+) = 0$

Donc $pS(p) + S(p) = \frac{4}{(p+2)^2}$

c.à.d : $(p+1)S(p) = \frac{4}{(p+2)^2}$

Donc $S(p) = \dfrac{4}{(p+2)^2(p+1)}$

4°) D'après l'énoncé

$$S(p) = \frac{4}{(p+2)^2(p+1)} = \frac{4}{p+1} - \frac{4}{(p+2)^2} - \frac{4}{p+2}$$

donc $s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{4}{p+1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{4}{(p+2)^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{4}{p+2}\right)$

$$= 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) - 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+2)^2}\right) - 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+2}\right)$$

$$= 4e^{-t}U(t) - 4f(t)e^{-2t}U(t) - 4e^{-2t}U(t)$$

avec $f(t) = t \cdot U(t)$

$$= 4e^{-t}U(t) - 4te^{-2t}U(t) - 4e^{-2t}U(t)$$

$$= \left(4e^{-t} - 4te^{-2t} - 4e^{-2t}\right)U(t)$$

$$= \left[4e^{-t} - 4\left(te^{-2t} + e^{-2t}\right)\right]U(t)$$

$$= 4\left(e^{-t} - (t+1)e^{-2t}\right)U(t)$$

5°) La tension de sortie, d'après le graphique, est supérieure ou égale à 0,25 volts pour $t \in [0,6 ; 2,4]$

Donc elle sera supérieure pendant : ~~...~~ $2,4 - 0,6 = 1,8$ s

Partie C :

1°) La valeur en ohm est représentée par la v.a. X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu = 500 ; \sigma = 10)$

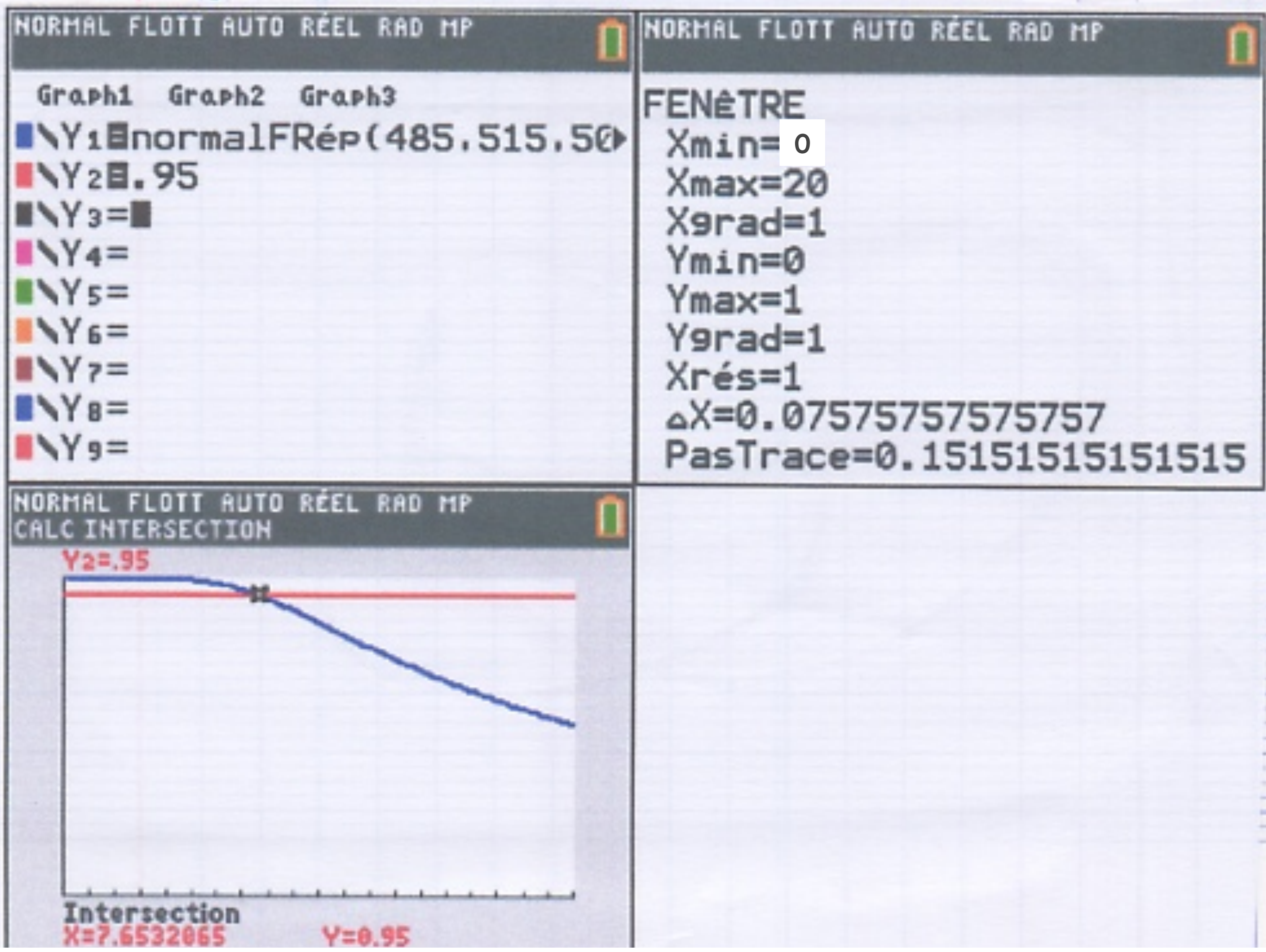
a) La résistance est conforme lorsque $485 \leq X \leq 515$.

$P(485 \leq X \leq 515) = \text{normalFrép}(485, 515, 500, 10)$
$= 0,866$ arrondi à 10^{-3} près

b) On cherche σ pour que :

$$P(485 \leq X \leq 515) \geq 0,95$$

Pour cela, j'utilise la calculatrice en représentant $P(485 \leq X \leq 515)$ en fonction de σ.
$Y_1 = \text{normalFRép}(485, 515, 500, X)$.
Je trace aussi la fonction $Y_2 = 0,95$
je regarde l'intersection des deux courbes (voir les figures)



On voit que la plus grande valeur de X (qui correspond à σ) est :

$$\sigma = 7{,}7 \text{ à } 0{,}1 \text{ près} \quad (7{,}6532)$$

2°) a) Y associe le nombre de résistances non conformes parmi 200.
La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est : 0,05
Donc Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 200 ; p = 0{,}05)$

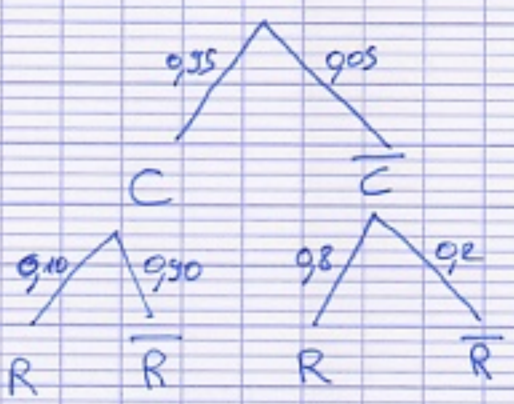
b) $P(Y = 10) = \text{binomFdp}(200, 0.05, 10) \simeq 0{,}128$ à 10^{-3} près.

interprétation : 12,8 % est la proba qu'il y ait exactement 10 résistances défectueuses dans un lot de 200 résistances

c) Le lot peut être renvoyé lorsque $P(Y \geq 15)$

$$\begin{aligned} P(Y \geq 15) &= 1 - P(Y < 15) \\ &= 1 - P(Y \leq 14) \\ &= 1 - \text{binomFrép}(200, 0{,}05, 14) \\ &= 0{,}078 \text{ à } 10^{-3} \text{ près} \end{aligned}$$

3°) a)



b) $P(R) = 0{,}95 \times 0{,}1 + 0{,}05 \times 0{,}8 = 0{,}135$

c) $P_{\overline{R}}(C) = \dfrac{P(\overline{R} \cap C)}{P(\overline{R})} = \dfrac{0{,}90 \times 0{,}95}{1 - 0{,}135} = 0{,}936$.