Exercices sur la loi normale (Fiche 2).

Exercice 1:

Une usine fabrique des plaquettes rectangulaires dont la longueur et la largeur sont usinées de manière indépendante. On admet que la longueur L et la largeur l d'une plaquette suivent des lois de Laplace-Gauss, de moyennes respectives 80,005 et 50,000 avec des écarts-types respectifs s_L=0,005 et s_l=0,005 (les dimensions étant exprimées en mm).

1. Déterminer la probabilité $P(L \leq 80{,}01)$.
2. Déterminer de même $P(l \geq 50{,}01)$.
3. On impose les normes de fabrication suivantes: $L=80 \pm 0{,}01$ et $l=50 \pm 0{,}01$ (mm).
   Quel est alors le pourcentage de plaquettes à rejeter à la sortie de la chaîne de fabrication?

Exercice 2:

Une machine fabrique des pièces de forme circulaire en grande série.
A chaque pièce, tirée au hasard, on associe son diamètre exprimé en millimètres; on définit ainsi une variable aléatoire X.
On suppose que X suit une loi normale; on désigne par m sa moyenne et par σ son écart-type.

1. Dans cette question, on suppose connue la moyenne: $m=150$.
   On a constaté que 8% des pièces de la production ont un diamètre supérieur à 150,3 mm.
   a) Quelle est la loi suivie par la variable $t = \dfrac{X-150}{\sigma}$? Établir que $\sigma=0{,}21$.
   b) Calculer le pourcentage de pièces de cette fabrication dont le diamètre est compris entre 149,9 et 150,42.
2. A chaque échantillon de 400 pièces, on associe la moyenne M des diamètres des pièces de cet échantillon. M est une variable aléatoire suivant une loi normale.
   On admet que la moyenne de M est $m=150$ et que l'écart-type de M est $s = \dfrac{\sigma}{\sqrt{400}} = 0{,}0105$.
   Déterminer h pour que : $P(m-h \leq M \leq m+h)=0{,}95$.

Exercice 3

Une machine produit des pièces destinées à être montées sur des mitigeurs thermostatiques. On considère la population statistique constituée par les diamètres des pièces issues de cette fabrication (exprimées en mm).

Soit un échantillon de 100 pièces tiré de la production. La variable aléatoire qui associe à toute pièce de cet échantillon son diamètre (exprimé en mm) est noté X. On suppose que X est une variable normale de moyenne $m=16{,}5$ et d'écart type $s= 0{,}1$.

a) Quelle est la probabilité pour que le diamètre d'une pièce tirée au hasard de cet échantillon soit dans l'intervalle [16,4; 16,6] ?
b) Soit h un réel. On désigne par P_h la probabilité pour que X soit dans l'intervalle : [16,5-h; 16,5+h]. Déterminer h pour que $P_h = 0{,}95$

Correction fiche n° 2.

Exercice 1 : L suit la loi normale $\mathcal{N}(80{,}005 \,;\, s_L = 0{,}005)$

ℓ suit la loi normale $\mathcal{N}(50{,}000 \,;\, s_\ell = 0{,}005)$

1°) En utilisant la calculatrice : $P(L \leq 80{,}01) = 0{,}8413$

2°) De même : $P(\ell \geq 50{,}01) = 0{,}02275$

3°) $P(79{,}99 \leq L \leq 80{,}01 \text{ et } 49{,}99 \leq \ell \leq 50{,}01)$ ← C'est la probabilité qu'une plaquette soit conforme

$= P(79{,}99 \leq L \leq 80{,}01) \times P(49{,}99 \leq \ell \leq 50{,}01)$

↑ car L et ℓ sont indépendants

$= 0{,}83999\ldots \times 0{,}9544\ldots = 0{,}8018 \simeq 80{,}2\,\%$

Il y aura donc $100 - 80{,}2 \simeq \underline{19{,}8\,\%}$ de pièces à rejeter.

Exercice 2 : 1°) a) Comme X suit la loi normale $\mathcal{N}(m\,;\sigma)$ avec $m = 150$ alors :

$$t = \frac{X - 150}{\sigma} \text{ suit la loi normale centrée réduite } \mathcal{N}(0\,;1)$$

Etablissons que $\sigma = 0{,}21$

méthode 1 : Cette méthode est suggérée par l'énoncé car on passe par la loi centrée réduite.

L'énoncé indique :

$$P(X \geq 150{,}3) = 0{,}08$$

on va passer à la loi centrée réduite

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{X-150}{\sigma} \geq \frac{150{,}3-150}{\sigma}\right) = 0{,}08$$

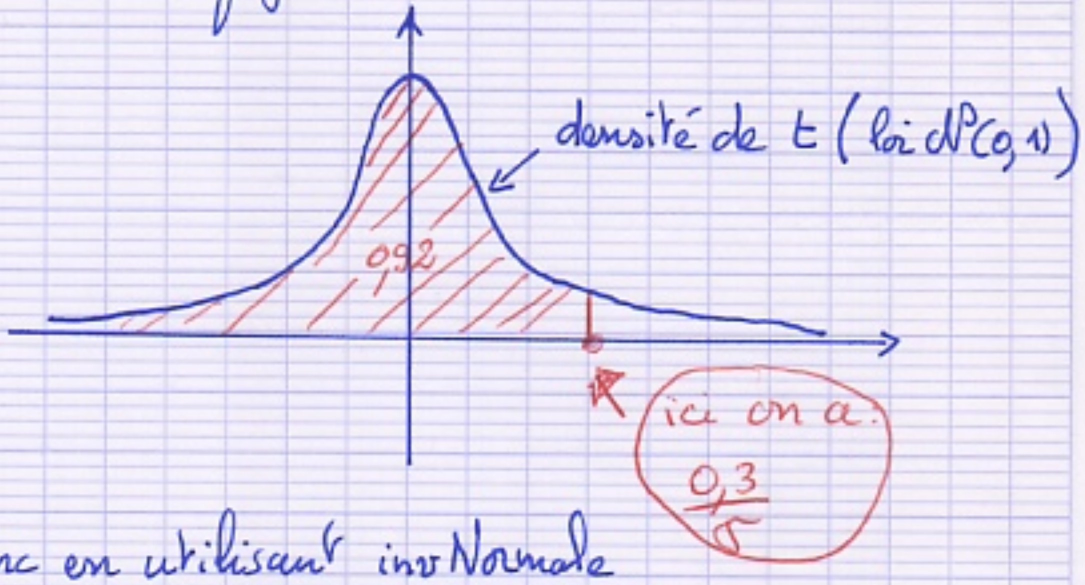
$$\Leftrightarrow P\left(t \geq \frac{0{,}3}{\sigma}\right) = 0{,}08$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - P\left(t \leq \frac{0,3}{\sigma}\right) = 0,08$$ ← on prépare à utiliser invNormal

$$\Leftrightarrow \quad P\left(t \leq \frac{0,3}{\sigma}\right) = 1 - 0,08$$

$$\Leftrightarrow \quad P\left(t \leq \frac{0,3}{\sigma}\right) = 0,92$$

Faisons une figure :



Donc en utilisant invNormale
(ou FraNormale)
pour une loi centrée réduite :

$$\frac{0,3}{\sigma} = \text{invNormale}(0,92\,;\,0,1\,;\,\text{GAUCHE})$$

$$\frac{0,3}{\sigma} = 1,405$$

Donc $\boxed{\sigma = \frac{0,3}{1,405} \simeq 0,21}$

Remarque : on ne pouvait pas utiliser invNormal avec $m = 150$ car on ne connait pas σ

méthode 2 : On utilise le mode graphique de la calculatrice en représentant

$P(X \geqslant 150,3)$ en fonction de σ.

puis on regarde pour quelle valeur elle vaut 0,08 car on sait que $P(X \geqslant 150,3) = 0,08$

voici l'écran : $Y_1 = \text{normalFrép}(150.3, 1E99, 150, X)$

cette variable représente σ

$Y_2 = 0,08$

(on choisit : $X_{min} = 0$ (car $\sigma > 0$)

$X_{max} = 0,5$ (car on doit montrer que $\sigma \simeq 0,2$

$Y_{min} = 0$

$Y_{max} = 1$) car Y est une proba.

On cherche l'abscisse du point d'intersection avec les fonctions "calculs" (fonction 2nde "trace")

On obtient :

$$\sigma = 0,213922$$

Donc $\boxed{\sigma \simeq 0,21}$

1/b) On cherche :

on prend la calculatrice car on connait $m = 150$ et $\sigma = 0,21$

$$P(149,9 \leq X \leq 150,42) = 0,66.$$

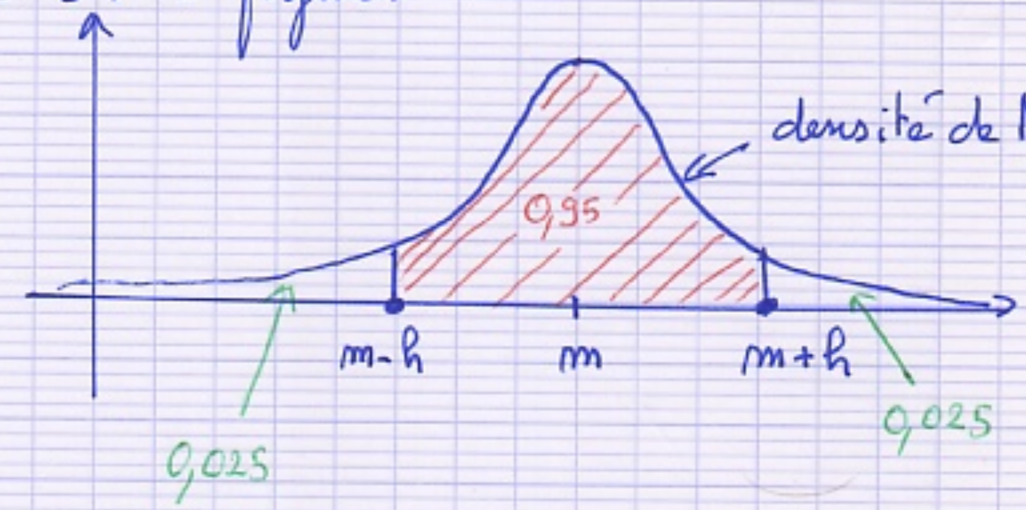
Il y a donc 66 % de pièces dont le diamètre est entre 149,9 et 150,42.

2°) D'après l'énoncé, M suit la loi normale $\mathcal{N}(m, s)$ avec $m = 150$ et $s = 0{,}0105$

On cherche h tel que :

$$P(m - h \leq M \leq m + h) = 0{,}95$$

Faisons une figure :



Donc Deux choix :

- $m - h = \text{invNormale}(0{,}025 ; 150 ; 0{,}0105)$
  $= 149{,}9794$

  Donc $h = m - 149{,}97\ldots$

  $h \simeq 0{,}02058$

ou bien :

- $m + h = \text{invNormale}(0{,}975 ; 150 ; 0{,}0105)$
  $= 150{,}020596$

  Donc $h = 0{,}02058$

Exercice 3

X suit la loi normale $\mathcal{N}(m = 16{,}5\ ;\ \sigma = 0{,}1)$

a) On cherche :

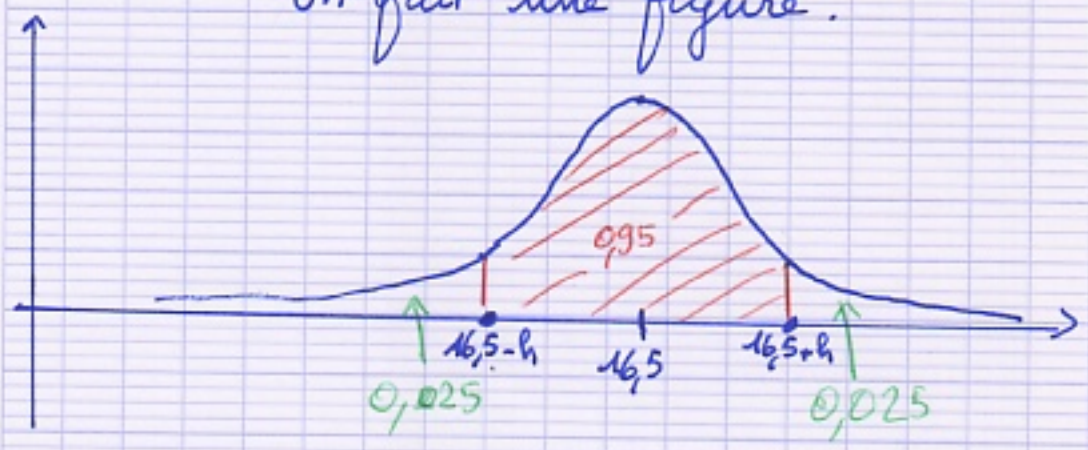
$$P(16{,}4 \leq X \leq 16{,}6) = \text{normalFrép}(16.4, 16.6, 16.5, 0.1)$$
$$\simeq 0{,}683$$

b)

$$P_h = P(16{,}5 - h \leq X \leq 16{,}5 + h)$$

$$\Leftrightarrow 0{,}95 = P(16{,}5 - h \leq X \leq 16{,}5 + h)$$

on fait une figure.



Donc $16{,}5 - h = \text{invNormale}(0.025, 16.5, 0.1, \text{GAUCHE})$
$$\simeq 16{,}304$$

Donc $h \simeq 16{,}5 - 16{,}304$

$$\boxed{h \simeq 0{,}196}.$$