Chapitre : Loi binomiale

I - Rappels sur les variables aléatoires

On considère une expérience aléatoire modélisée par une loi de probabilité P sur un ensemble fini Ω (l'univers).

On appelle v.a. (variable aléatoire) toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$.
(Définir une v.a. X sur Ω c'est donc associer à chaque éventualité e_i de Ω un nombre réel.)

① Loi de probabilité d'une v.a. X.

Déterminer la loi de probabilité de X c'est déterminer :
- Les différentes valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ prises par X.
- Les probabilités $p_i = P(X = x_i)$

On résume souvent la loi d'une v.a. X par un tableau :

valeurs x_i prises par X	x_1	x_2	...	x_n
$p_i = P(X=x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

② Espérance, variance et écart type.

- L'espérance mathématique de X est le réel noté E(X) défini par :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

C'est la moyenne des valeurs prises par X pondérées par leurs proba.

- La variance de X est le réel noté V(X) et défini par :

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2$$

on a : $\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$ (formule utilisée souvent pour les calculs

La variance mesure la dispersion des valeurs prises par X par rapport à la moyenne : plus elle est grande, plus les valeurs prises sont éloignées de la moyenne.

- L'écart type de X, noté $\sigma(X)$, est défini par :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

L'écart type a la même unité que X.

propriétés : On a les propriétés suivantes ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) :

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

→ Voir exercices 1 et 2.

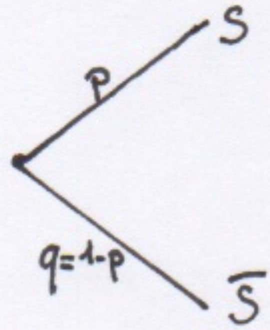
II - Loi binomiale.

① Epreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience aléatoire à deux issues :

- L'une que l'on nomme "SUCCÈS" que l'on note S avec $P(S) = p$.
- L'autre nommée "ÉCHEC" que l'on note $\overline{S}$ avec $P(\overline{S}) = q = 1-p$

arbre de probabilités correspondant.



② Variable aléatoire de Bernoulli

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p, la v.a. X qui prend la valeur 1 si S se produit et 0 sinon suit la loi de probabilité suivante :

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	q	p

avec $q = 1-p$

On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p

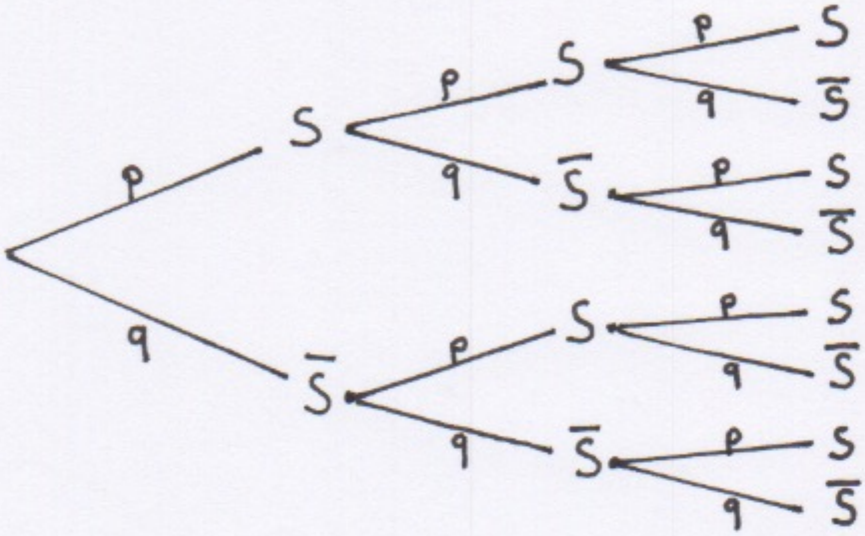
On a : $E(X) = p$ et $V(X) = pq$ (avec $q = 1-p$)

3) Schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Exemple : On répète trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p.

On représente cette situation par l'arbre suivant (qu'on appelle aussi shéma de Bernoulli)



4) Loi binomiale

a) Définition : On considère un shéma de Bernoulli, répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre p. X est la v.a. qui indique le nombre de succès sur ces n épreuves.

La loi de probabilité de la v.a. X (égale au nombre de succès au cours de ces n épreuves) se nomme loi binomiale de paramètres n et p.
On la note : $\mathcal{B}(n;p)$

Cette v.a. prend les valeurs entières : $0;1;2;\ldots;n$

<u>Exemple</u> : On jette 3 fois de suite un dé non pipé.
On note X la v.a. qui indique le nombre de 6 obtenus au bout des 3 lancés.

1°) Expliquez pourquoi X suit une loi binomiale et donner les paramètres de cette loi.

2°) Dressez l'arbre de probabilités pondérées correspondant.

3°) Donner la loi de X sous forme d'un tableau.

b) Coefficients binomiaux

On réalise l'arbre d'un schéma de Bernoulli identiques et indépendantes.

Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, le nombre de chemins réalisant k succès est noté $\binom{n}{k}$.

Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux

on lit : " k parmi n "

<u>Exemple :</u> En utilisant le schéma du 4a) donner :

$\binom{3}{0} =$ $\quad$ $\binom{3}{1} =$ $\quad$ $\binom{3}{2} =$ $\quad$ $\binom{3}{3} =$

<u>On a les propriétés suivantes :</u>

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$

formule de Pascal : $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

c) Propriétés sur les lois binomiales

Si X est une v.a. qui suit la loi binomiale de paramètres n et p alors pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$:

$$\boxed{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{où } q = 1-p}$$

De plus : $\boxed{E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = npq}$

d) Calculs pratiques

• Calculer un cœfficient binomial

exemple : calculer $\binom{10}{3}$, c'est à dire le nombre de combinaisons de 3 parmi 10.

→ Avec la calculatrice : $10 \text{ nCr } 3 =$

menu : MATH → PRB

→ Avec une formule : $\binom{n}{k} = \dfrac{\overbrace{n\times(n-1)\times\dots\times(n-k+1)}^{k \text{ produits}}}{k\times(k-1)\times\dots\times 1}$

$$\binom{10}{3} = \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 10\times3\times4 =$$

• Calcul pratique de $P(X=k)$ et $P(X\leq k)$ si X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$

→ Avec la calculatrice :

$P(X=k) \longrightarrow \underbrace{\text{binomFdp}(n,p,k)}_{\text{menu distrib}}$

$P(X\leq k) \longrightarrow \text{binomFrep}(n,p,k)$

→ On peut aussi utiliser la formule :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

exemple : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n=5\,;\,p=0{,}3)$

Calculer $P(X=2)$ $P(X=3)$ et $P(X\leq 3)$.

Exercices loi binomiale

n°1

La loi de probabilité d'une v.a. X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-2	1	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$

1°) Calculer E(X) et V(X).
2°) Vérifier les résultats en utilisant une calculatrice.
3°) Quelles sont les valeurs prises par la v.a. : $Y=-3x+2$.
4°) Déterminer E(Y) et V(Y).

n°2

Un joueur lance un dé équilibré, et :
- il gagne 1 € si le dé amène 1, 2 ou 3,
  0,5 € si dé amène 4,
- il perd 2 € si dé amène 5 ou 6.

Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat amené par le dé, associe le gain en euros (positif ou négatif) du joueur.
1° Déterminer la loi de probabilité de X.
2° Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
3° Utiliser le menu Statistiques de la calculatrice pour retrouver les résultats de la question précédente.

n°3

1° À l'aide de la calculatrice, donner la valeur de chacun des coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{8}{3},\quad \binom{21}{9},\quad \binom{36}{17},\quad \binom{36}{18}.$$

2° Sans calculatrice, donner la valeur de $\binom{2\,012}{2\,011}$, $\binom{21}{12}$ et $\binom{37}{18}$.

n°4

Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}2$?

n°5

Sachant que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, calculer :
*Pour **a)** et **b)** les résultats sont à arrondir à 10^{-3}.*
a) pour $n = 6$ et $p = 0{,}4$
$P(X=3)$, $P(X=0)$, $P(X\leq 2)$, $E(X)$, $\sigma(X)$;
b) pour $n = 6$ et $p = 0{,}6$
$P(X=6)$, $P(X\leq 2)$, $P(X>1)$;
*Pour **c)** et **d)** on donnera les résultats avec un seul chiffre non nul.*
c) pour $n = 50$ et $p = 0{,}5$
$P(X=0)$, $P(X=49)$, $P(X<50)$, $E(X)$;
d) pour $n = 100$ et $p = 0{,}05$
$P(X=0)$, $P(X=100)$, $P(X=2)$, $E(X)$;

n°6

Tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.
Une urne contient dix boules dont trois rouges.
On tire huit boules l'une après l'autre en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne.
On suppose l'équiprobabilité des tirages.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules rouges obtenues.
1° Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2° Calculer $P(X \leq 5)$.
3° Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.
Que représente $E(X)$?

n°7

Dans ce qui suit, tous les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3}.
À la livraison d'un grand nombre de pièces dont 1 % sont défectueuses, on prélève au hasard un échantillon de 50 pièces.
La population est suffisamment importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de cinquante pièces. On a donc une succession de cinquante épreuves indépendantes. On note X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de 50 pièces, associe le nombre de pièces défectueuses de ce prélèvement.
1° Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2° Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « L'échantillon ne comporte aucune pièce défectueuse » ;
B : « L'échantillon comporte une seule pièce défectueuse » ;
C : « L'échantillon comporte au moins deux pièces défectueuses ».