

Fiche d'exercices sur la loi normale

Exercice 1

Soit X une v.a. qui suit une loi normale $N(0;1)$.

1°) Quelle est l'espérance de X et sa variance?

2°) Calculer les probabilités suivantes:

$$P(X \leq 3,4); \quad P(X \leq -2); \quad P(X \geq -1); \quad P(-1 \leq X \leq 1); \quad P(-2 \leq X \leq 2);$$

$$P(|X| \leq 2,6); \quad P(3X \leq 1).$$

Exercice 2

On se donne maintenant une v.a. Y qui suit une loi normale $N(5;2)$.

1°) Quelle est l'espérance de Y et quelle est sa variance?

2°) Calculer les probabilités suivantes:

$$P(Y \leq 6); \quad P(4 \leq Y \leq 7); \quad P(-Y \geq -5); \quad P(Y \leq 3).$$

Exercice 3 (B.T.S. électronique 91)

Une machine fabrique des résistances électriques dont la valeur en ohms est une v.a. R de loi normale de paramètres $m=100$ et $\sigma=3$. Une seconde machine fabrique des résistances dont la valeur en ohms est une v.a. R' de loi normale de paramètres $m'=200$ et $\sigma'=4$.

Le montage en série de deux résistances prélevées au hasard dans les productions respectives de la première et de la deuxième machine donne une résistance dont la valeur en ohms est la v.a. $R''=R+R'$.

1°) Calculer l'espérance de R'' .

2°) On suppose que les variables R et R' sont indépendantes. Calculer alors la variance de R'' donnée par la formule $V(R'')=V(R)+V(R')$.

3°) On admet que R'' suit une loi normale. Quelle est la probabilité qu'une résistance ainsi obtenue ait une valeur comprise entre 290 et 305 ohms?

Exercice 4 (B.T.S. électronique 90)

Une machine usine des pièces dont la longueur X suit une loi normale de moyenne $m=54$ et d'écart-type $\sigma=0,2$. Une pièce est considérée comme défectueuse si $X < 53,6$ ou $X > 54,3$.

1°) a) Calculer la probabilité p pour qu'une pièce soit défectueuse.

b) Pour vérifier que la machine ne s'est pas dérégulée, on détermine des cotes d'alertes $m-h$ et $m+h$ définies par:

$$P(m-h \leq X \leq m+h) = 0,95.$$

Calculer les cotes d'alertes (On utilisera la variable centrée réduite).

2°) On admet que la probabilité qu'une pièce soit défectueuse est $p=0,09$.

Un acheteur achète un lot de 40 pièces. Calculer les probabilités:

-de n'avoir aucune pièce défectueuse dans le lot.

-d'avoir au plus deux pièces défectueuses.

Correction fiche n°1

Exercice 1: X suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$

ceci est l'écart-type,
souvent noté: σ
la variance $V(X) = \sigma^2$

ceci est
l'espérance
souvent noté m ou μ

$$1^o) E(X) = 0 \text{ et } V(X) = 1^2 = 1$$

2°) dans cette question on utilise la fonction de la calculatrice: normalFRép (du menu distrib)

$$P(X \leq 3,4) = 0,99966$$

$$P(X \leq -2) = 0,02275$$

$$P(X \geq -1) = 0,84134$$

$$P(-1 \leq X \leq 1) = 0,68269$$

$$P(-2 \leq X \leq 2) = 0,9545 \quad (\text{arrondi})$$

$$P(|X| \leq 2,6) = P(-2,6 \leq X \leq 2,6) = 0,99068$$

La valeur absolue d'un nombre est $\leq 2,6$ lorsque ce nombre est entre $-2,6$ et $2,6$.

Ici, on peut prendre la calculatrice.

$$P(3X \leq 1) = P(X \leq \frac{1}{3})$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \text{car } 3X \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{3X}{3} \leq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow X \leq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Exercice 2: Y suit la loi normale $\mathcal{N}(5; 2)$

ceci est la
moyenne m

ceci est
l'écart-type
 σ .

1°) $E(Y) = 5$, la variance $V(X) = \sigma^2 = 2^2 = 4$

2°) En utilisant la calculatrice:

$$P(Y \leq 6) = 0,69146$$

$$P(4 \leq Y \leq 7) = 0,53281$$

$$P(-Y \geq -5) = P(Y \leq 5) = 0,5$$

$\downarrow$ car $-Y \geq -5$

$\Leftrightarrow Y \leq 5$ (dans une inéquation, si l'on multiplie les deux membre par un nombre négatif (ici -1) il ne faut pas oublier de changer le sens de l'inégalité)

$$P(Y \leq 3) = 0,15866$$

Exercice 3

R suit la loi normale $\mathcal{N}(m=100; \sigma=3)$

R' suit la loi normale $\mathcal{N}(m'=200; \sigma'=4)$

1°) $R'' = R + R'$ donc $E(R'') = E(R) + E(R')$
 $= 100 + 200 = \underline{\underline{300}}$

2°) Si R et R' sont indépendantes, alors:

$$\begin{aligned} V(R'') &= V(R + R') = V(R) + V(R') \\ &= 3^2 + 4^2 \\ &= 9 + 16 = 25 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{V(R'') = 25}$

3°) R'' suit la loi normale de moyenne $m'' = 300$ et d'écart-type: $\sigma'' = \sqrt{25} = 5$

$\uparrow$ racine carrée de la variance

On utilise donc la calculatrice pour calculer:

$$P(290 \leq R'' \leq 305) = 0,81859$$

Exercice 4: X suit la loi normale $\mathcal{N}(m=54; \sigma=0,2)$

1°) a) Il est plus facile de calculer la probabilité qu'une pièce n'est pas défectueuse:

$$P(53,6 \leq X \leq 54,3) = 0,910 \text{ (environ)}$$

$$\text{Donc } p = 1 - 0,910 = 0,09 \text{ (9\% des cas)}$$

b) Pour cette question, nous avons ~~deux~~ méthodes

méthode n°1: Celle qui est la plus utilisée par les enseignants.

Pour cela il faut bien comprendre ce qu'est une v.a. centrée réduite.

→ • une variable aléatoire est dite centrée lorsque son espérance est nulle.

Pour centrer une v.a. X il suffit de lui retrancher sa moyenne.

→ • une variable est réduite lorsque son écart-type vaut 1

Donc si X suit la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$ on peut dire que X suit la loi normale centrée réduite car $E(X) = m = 0$ et $\sigma(X) = \sigma = 1$

Pour appliquer cette méthode, il faut connaître le théorème suivant :

théorème : Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ alors la v.a. :

$$T = \frac{X - m}{\sigma}$$

suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

On dit que T est la variable aléatoire centrée réduite de X .

Revenons à la question : On cherche $m-h$ et $m+h$ tel que :

$$P(m-h \leq X \leq m+h) = 0,95$$

$$\Leftrightarrow P(-h \leq X - m \leq h) = 0,95$$

on a retranché m aux 3 membres de l'inégalité

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{h}{\sigma} \leq \frac{X - m}{\sigma} \leq \frac{h}{\sigma}\right) = 0,95$$

on a divisé par $\sigma > 0$ les 3 membres de l'inégalité

$$\Leftrightarrow P\left(-\frac{h}{\sigma} \leq T \leq \frac{h}{\sigma}\right) = 0,95$$

où $T = \frac{X - m}{\sigma}$ est la v.a.

centrée réduite de X elle suit donc une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

Faisons une figure (T suit la loi $N(0;1)$)



Comme l'aire totale sous la courbe est 1 et que la courbe est symétrique, les aires en noire (à droite et à gauche) valent: $\frac{1-0,95}{2} = 0,025$ chacune

C'est ici qu'il faut connaître la fonction invNormale ou bien FracNormale.

Suivant le model et la version vous avez un de ces deux écrans:

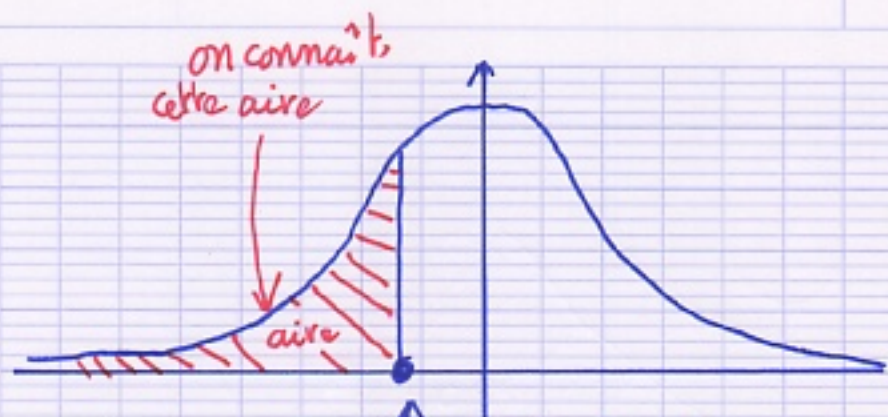
FracNormale
aire:
$\mu : 0$
$\sigma : 1$
Coller

↑ Ici, il n'y a pas les 3 options GAUCH CTR DROIT par défaut, c'est l'option GAUCH.

invNormale
aire:
$\mu : 0$
$\sigma : 1$
Zone: GAUCH CTR DROIT
Coller:

↑ Choisir GAUCH, alors vous avez ce que j'explique ici

Que fait-cette fonction ?



La fonction invNormal ou FracNormale donne la valeur de l'abscisse de ce point

Appliquons cela à notre problème

On connaît l'aire: 0,025

la fonction invNormal nous donnera $-\frac{h}{\sigma}$

Frac Normale
aire: 0,025
μ : 0
σ : 1
Coler

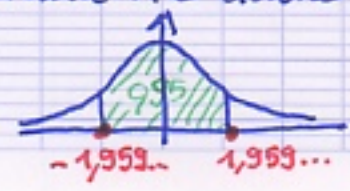
invNormal
aire: 0,025
μ : 0
σ : 1
zone: GAUCH CTR DROIT

on obtient: $-\frac{h}{\sigma} = -1,959963986$

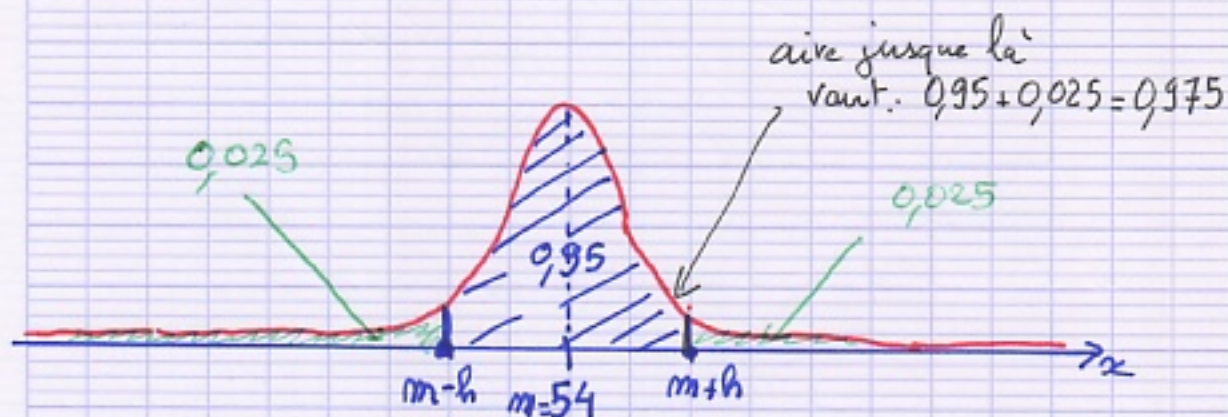
Donc $h = 1,959963986 \times \sigma$ ($\sigma = 0,2$)
 $h = 0,39199...$

Donc $\begin{cases} m - h = 54 - 0,39199 \approx 53,608 \\ m + h = 54 + 0,39199 \approx 54,392 \end{cases}$

Remarque: Si vous entrez aire = 0,95 avec l'option CTR (qui signifie centrée) la calculatrice donne les deux bornes (points rouges)



méthode n°2: Avec les calculatrices, on n'est plus obligé de passer par la v.a. centrée réduite.
Faisons une figure avec la loi de $X \sim \mathcal{N}(\mu=54; \sigma=0,2)$



Donc $m-h = \text{InvNormal}(0,025; 54; 0,2)$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $\mu=54$ $\sigma=0,2$

on trouve

$$\underline{m-h = 53,608}$$

On aura aussi $m+h = \text{InvNormal}(0,975; 54; 0,2)$
on trouve

$$\underline{m+h = 54,392}$$

Remarque: Ceux qui ont l'option CTR (centrée)

Vous rentrez: invNormal

aire: 0,95

μ : 54

σ : 0,2

zone: GAUCH CTR DROIT

on obtient: $\text{invNormal}(0,95; 54; 0,2; \text{CENTRE}) = \{53,608 \quad 54,392\}$
(on remarque qu'elle donne les deux bornes.)

méthode n°3 : C'est une méthode graphique en utilisant la calculatrice

l'égalité: $P(m-h \leq X \leq m+h) = 0,95$

est en réalité une équation d'inconnue h .

Je vais entrer dans les fonctions :

$$Y_1 = \text{normalFRép}(54-X, 54+X, 54, 0,2)$$

Ce X est la variable dans le mode fonction, il représente le h de l'équation du début.

On trace donc la probabilité du premier membre en fonction de h (h sera en abscisse)

$$Y_2 = 0,95$$

Je choisis la Fenêtre :

$$X_{\min} = 0$$

$$X_{\max} = 1$$

$$Y_{\min} = 0$$

$$Y_{\max} = 1$$

car Y_1 est une probabilité donc tjrs entre 0 et 1

Sur le graphique je cherche le point d'intersection des deux courbes, l'abscisse sera la valeur de h pour laquelle $P(m-h \leq X \leq m+h) = 0,95$

On peut la trouver dans la fonction seconde calculs
 → on choisit intersection, on valide les deux courbes et la valeur initiale (on peut laisser la valeur donnée en mode graph)

On obtient: $X = 0,3919926$

Donc $h = 0,3919926$ et on peut calculer $m-h$ et $m+h$.

OUF...

2°) Notons N la v.a. qui indique le nombre de pièces defectueuses parmi les 40.

On répète donc 40 fois la même expérience aléatoire le SUCCÈS = "la pièce est defectueuse". Comme la probabilité du succès est $p = 0,09$ on peut affirmer que N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n=40; p=0,09)$

- La probabilité de n'avoir aucune pièce defectueuse est donc:

$$P(N=0) = \text{binomFdp}(40, 0,09; 0) = 0,022996$$

- La probabilité d'avoir au plus deux pièces defectueuses est donc:

$$P(N \leq 2) = \text{binomFRép}(40, 0,09, 2) = 0,2894$$