Un Exercice de probabilités

Partie A (5 points)

Une source émet un signal binaire composé de 0 et de 1. Lors du transport, le signal peut être déformé. Un 0 peut être transformé en 1 avec une probabilité 0,1 et, de même, un 1 peut être transformé en 0 avec une probabilité 0,1. Pour toute la suite, dans une série de chiffres, on lit de gauche à droite, le premier chiffre envoyé étant donc celui écrit le plus à gauche.

On envoie le signal 00. On admet que les erreurs de transmission sont des événements aléatoires indépendants les uns des autres. On considère les événements suivants :

- E1 : « les deux chiffres sont modifiés »
- E2 : « le premier chiffre est modifié mais pas le deuxième »
- E3 : « aucun chiffre n'est modifié »
- E4 : « au moins un des chiffres est modifié »

  Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Une bonne réponse rapporte 1 point, une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

1. La probabilité de l'événement E1 est égale à :

   • 0,01 • 0,99 • 0,09 • 0,81

2. Si l'événement E2 est réalisé, le signal reçu est :

   • 00 • 01 • 10 • 11

3. La probabilité de l'événement E2 est égale à :

   • 0,19 • 0,81 • 0,09 • 0,90

4. La probabilité de l'événement E3 est égale à :

   • 0,01 • 0,99 • 0,09 • 0,81

5. La probabilité de l'événement E4 est égale à :

   • 0,18 • 0,20 • 0,11 • 0,91 • 0,17 • 0,19

Partie B (8 points)

1. On considère l'expérience aléatoire consistant à émettre une chaîne constituée de 10 fois le chiffre 1 et à observer la chaîne reçue. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque chaîne ainsi reçue, associe le nombre d'erreurs de transmission, c'est-à-dire le nombre de 0 obtenus.

On rappelle que la probabilité qu'un chiffre soit mal transmis est 0, 1.

On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

a) Calculer à 0,001 près la probabilité qu'il y ait exactement une erreur de transmission.

b) Montrer que la probabilité qu'il y ait au plus une erreur de transmission est égale à 0,74 à 0,01 près.

2. Estimant que la qualité des transmissions n'est pas assez bonne, les techniciens procèdent à quelques réglages afin de réduire les « bruits » à l'origine des erreurs. La probabilité qu'un chiffre soit mal transmis devrait ainsi être fortement diminuée.

Effectivement, à l'issue des réglages, on constate que la proportion de chiffres mal transmis est égale à 0,002.

a) On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de chiffres mal transmis dans une chaîne de 1 000 chiffres. On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer à 0,001 près la probabilité qu'il y ait au moins une erreur de transmission parmi les 1 000 chiffres envoyés.

Partie A (5 points)

Une source émet un signal binaire composé de 0 et de 1. Lors du transport, le signal peut être déformé. Un 0 peut être transformé en 1 avec une probabilité 0,1 et, de même, un 1 peut être transformé en 0 avec une probabilité 0,1. Pour toute la suite, dans une série de chiffres, on lit de gauche à droite, le premier chiffre envoyé étant donc celui écrit le plus à gauche.

On envoie le signal 00. On admet que les erreurs de transmission sont des événements aléatoires indépendants les uns des autres. On considère les événements suivants :

- E1 : « les deux chiffres sont modifiés »
- E2 : « le premier chiffre est modifié mais pas le deuxième »
- E3 : « aucun chiffre n'est modifié »
- E4 : « au moins un des chiffres est modifié »

Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Une bonne réponse rapporte 1 point, une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

1. La probabilité de l'événement E1 est égale à :

   • 0,01 • 0,99 • 0,09 • 0,81

2. Si l'événement E2 est réalisé, le signal reçu est :

   • 00 • 01 • 10 • 11

3. La probabilité de l'événement E2 est égale à :

   • 0,19 • 0,81 • 0,09 • 0,90

4. La probabilité de l'événement E3 est égale à :

   • 0,01 • 0,99 • 0,09 • 0,81

5. La probabilité de l'événement E4 est égale à :

   • 0,18 • 0,20 • 0,11 • 0,91 • 0,17 • 0,19

Partie A Voir l'énoncé

Partie B 1°) a) X indique le nombre d'erreurs sur 10 chiffres et la probabilité qu'un chiffre soit mal transmis est $p = 0{,}1$

Donc $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n=10\,;\, p=0{,}1)}$

On cherche $P(X=1)$. A l'aide de la calculatrice :

$\boxed{P(X=1) = 0{,}387 \text{ à } 0{,}001 \text{ près}}$ 2pts

b) On cherche $P(X \leq 1)$

A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$\boxed{P(X \leq 1) = 0{,}74 \text{ à } 0{,}01 \text{ près}}$ 2pts

2°) a) Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n=1000\,;\, p=0{,}002)$ 1pt

b) On cherche $P(Y \geq 1)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y \leq 0)$$
$$= 1 - \underbrace{0{,}135}_{\text{(calculatrice)}} = 0{,}865$$

$\boxed{P(Y \geq 1) \simeq 0{,}865 \text{ à } 0{,}001 \text{ près}}$ 3pts