Loi uniforme

Exercice 1 : ***QCM***

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[-1\,;3]$; elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\lambda \text{ si } x\in[-1\,;3]\\ 0 \text{ si } x\notin[-1\,;3]\end{cases}$. Alors :

1) $\lambda=1$ 2) $\lambda=3$ 3) $\lambda=4$ 4) $\lambda=\frac{1}{4}$

Exercice 2 : ***QCM***

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[-2\,;2]$; elle admet pour densité la fonction f définie par $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} \text{ si } x\in[-2\,;2]\\ 0 \text{ si } x\notin[-2\,;2]\end{cases}$.

Alors :

1) $E(X)=0$ 2) $E(X)=-1$ 3) $E(X)=\frac{1}{2}$ 4) $E(X)=1$

Exercice 3 : ***Vrai ou faux***

Soit a et b deux réels tels que $a<b$. X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a\,;b]$. On nomme F la fonction de répartition définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $F(x)=P(X\leqslant x)$, alors :

a) F est croissante

b) $F(b)=1$

c) $F(b)=\frac{1}{2}$

d) F peut être constante sur $[c\,;d]$ inclus dans $[a\,;b]$ avec $c<d$.

Exercice 4 :

Soit X un réel pris au hasard dans l'intervalle $[-2\,;3]$.

a) Représenter graphiquement la densité f de X.

b) Exprimer selon les valeurs du réel x la probabilité $P(X\leqslant x)$.
Représenter, au-dessous de la fonction densité, la fonction de répartition F définie pour x de $\mathbb{R}$ par $F(x)=P(X\leqslant x)$

c) Calculer $P(-1\leqslant X\leqslant 1)$. Faire apparaître cette probabilité sur le schéma.
Vérifier que $P(-1\leqslant X\leqslant 1)=F(1)-F(-1)$

d) Calculer l'espérance de X.

Exercice 5 :

Soit X un réel pris au hasard dans l'intervalle $[-\pi\,;\pi]$.

a) Représenter graphiquement la densité f de X.

b) Exprimer selon les valeurs du réel x la probabilité $P(X\leqslant x)$.
Représenter, au-dessous de la fonction densité, la fonction de répartition F définie pour x de $\mathbb{R}$ par $F(x)=P(X\leqslant x)$

c) Calculer $P\left(0\leqslant X\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. Faire apparaître cette probabilité sur le schéma.
Vérifier que $P\left(0\leqslant X\leqslant\frac{\pi}{2}\right)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F(0)$

d) Calculer l'espérance de X.

Exercice 6 :

On choisit au hasard un nombre dans l'intervalle $[10\,;100]$.

1) Déterminer la probabilité que ce nombre soit compris entre 20 et 50.

2) Déterminer la probabilité que ce nombre soit inférieur à 60.

3) Déterminer la probabilité que ce nombre soit supérieur à 90.

Exercice 7 : *Concevoir une simulation d'une loi uniforme et l'exploiter*

1) Écrire la formule simulant une loi uniforme $U(3\,;8)$ avec la fonction ALEA() d'un tableur.

2) Écrire la formule donnant la fréquence de valeurs comprises entre 4 et 5 pour une simulation réalisée avec 500 cellules.

3) Ouvrir une feuille de calcul et appliquer les formules des questions 1 et 2. Quelle est la fréquence obtenue ?

Exercice 8 :

On suppose que le temps d'attente à un arrêt de tramway, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle [0;30].

1) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit comprise entre 15 et 20 minutes.

2) Déterminer la probabilité que la durée d'attente d'une personne prise au hasard soit supérieure à 20 minutes.

3) Quel est le temps moyen d'attente à cet arrêt de tramway ?

4) Sachant qu'une personne attend le tramway depuis 10 minutes, quelle est la probabilité qu'elle attende encore au moins 5 minutes ?

Exercice 9 :

Rafael habite à 1 km de son lycée. On note X la variable aléatoire égale à la durée, exprimée en minutes, du trajet que Rafael emprunte pour se rendre au lycée.
On suppose que X est distribuée suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[15\,;20]$.

1)a) Donner une fonction de densité de la loi suivie par X.

b) Quel est le temps moyen du trajet de Rafael ?

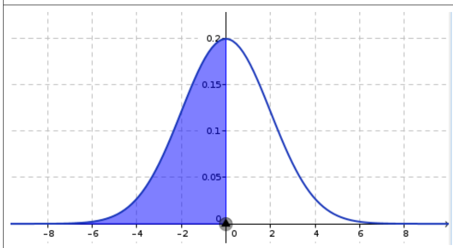
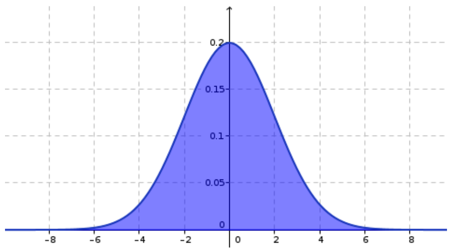
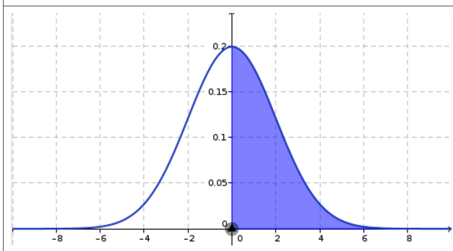
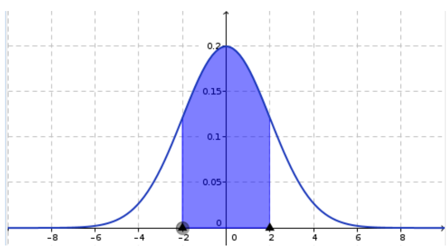
c) Quel est la probabilité qu'il mette moins de 17 minutes pour se rendre à l'école ?

2) On suppose que la durée d'un trajet est indépendante de celle des autres trajets. Sur une semaine, Rafael se rend à son lycée tous les jours du lundi au vendredi.
Quelle est la probabilité qu'au moins un trajet ait duré plus de 19 minutes ?

Loi normale

Exercice 10 :

On considère la variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart type 2 .
Pour chacune des représentations ci-dessous, écrire la probabilité qui correspond à la zone coloriée, puis proposer sans utiliser de calculatrice une valeur approchée de cette probabilité.

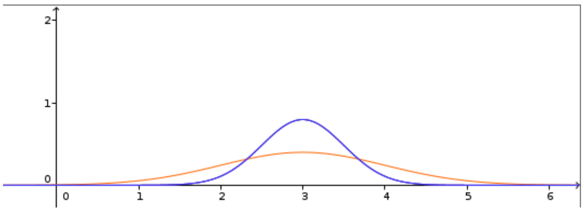
Représentation	Probabilité	Valeur
		
		
		
		

EXEMPLES DE LOIS À DENSITÉ – page 2

Exercice 11 :

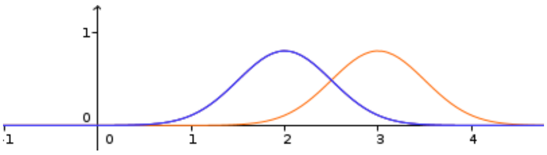
Voici deux densités de deux variables aléatoires X (en bleu) et Y (en orange)
Sans calcul, compléter le texte suivant avec les mots « égal(e) », « inférieur(e) » ou « supérieur(e) ».

a)



L'espérance de X est …...................... à l'espérance de Y .
L'écart type de X est …...................... à l'écart type de Y .

b)



L'espérance de X est …...................... à l'espérance de Y .
L'écart type de X est …...................... à l'écart type de Y .

Exercice 12 :

La variable aléatoire X suit une loi à densité (uniforme ou normale)
Compléter les cases vides du tableau.

	$P(X<2)$	$P(X=2)$	$P(X>2)$	$P(X>3)$	$P(2<X<3)$
cas1	0,5			0,3	
cas2	0,3				0,5
cas3			0,4		0,3

Exercice 13 :

Un constructeur automobile a créé un nouveau moteur diesel pour équiper ses petits modèles. La durée de vie de ce moteur, exprimée en nombre de kilomètres est une variable aléatoire X qui suit une loi normale $N(200000\,;30000)$.
1) Quelle est la probabilité que la durée de vie du moteur soit supérieure à 250000 km ?
2) Les véhicules équipés de ce moteur sont garantis 120000 km.
Quelle est la probabilité que la garantie soit utilisée pour un problème de moteur cassé ?
3) Le constructeur a vendu en tout 145000 véhicules. Estimer le nombre de fois où le constructeur va faire fonctionner la garantie pour un problème de moteur cassé.

Exercice 14 :

Lors d'une réaction entre deux composés chimiques A et B et dans des conditions identiques, la quantité de chaleur dégagée, exprimée en Joules, est une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathrm{N}(1000;200)$.
1) Quelle est la probabilité que la quantité de chaleur dégagée soit inférieure à 100 ?
2) Quelle est la probabilité que la quantité de chaleur dégagée soit supérieure à 1500?

Exercice 15 :
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $N(\mu\,;\sigma)$. On sait que :
$P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx 0{,}68$, $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0{,}95$ et
$P(\mu-3\sigma\leqslant X\leqslant\mu+3\sigma)\approx 0{,}997$
A partir de ces valeurs, donner les valeurs des probabilités suivantes :
a) $P(\mu<X<\mu+\sigma)$ b) $P(\mu-2\sigma<X)$
c) $P(\mu+2\sigma<X)$ d) $P(X<\mu+3\sigma)$
Conseil : penser à représenter la densité et à colorier les zones qui correspondent aux différentes probabilités.

Approximation d'une loi binomiale par la loi normale

Exercice 16 :

La variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(100\,;0{,}8)$.
1) Calculer l'espérance et l'écart type de la loi binomiale.
2) On décide d'approcher cette loi par une loi normale.
Quelles sont les caractéristiques de cette loi normale (espérance et écart type) ?
3)En utilisant une approximation avec la loi normale, calculer $P(70<X<90)$.

Exercice 17 :

La variable aléatoire X suit une loi binomiale $B(50\,;0{,}10)$.
1) Calculer l'espérance μ et l'écart type σ de la loi binomiale.
2) Calculer à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice $P(X\leqslant 6)$.
3) On décide d'approcher cette loi par une loi normale.
On introduit une variable aléatoire Y qui suit une loi $N(\mu\,;\sigma)$.
Calculer, à l'aide d'un logiciel ou d'une calculatrice, $P(Y\leqslant 6)$ et comparer avec le résultat obtenu précédemment.

Correction de continuité

Exercice 18 :

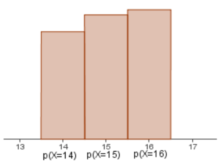
Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $B(40\,;0{,}4)$.

1) Calculer la probabilité de l'événement $14\leqslant X\leqslant 16$.

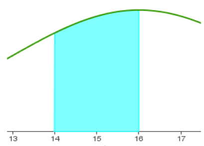
2) Par quelle variable aléatoire Y suivant une loi normale peut-on l'approcher ?

3) Calculer la probabilité $P(14\leqslant Y\leqslant 16)$. Les résultats sont-ils satisfaisants ?

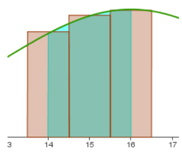
Une meilleure approximation de $P(X=14)+P(X=15)+P(X=16)$ sera obtenue en calculant $P(13{,}5\leqslant Y\leqslant 16{,}5)$ avec la loi normale.



Représentation graphique avec la loi binomiale



Représentation graphique avec la loi normale



A retenir :

Pour obtenir une bonne approximation de la loi binomiale par la loi normale , il faut effectuer une correction dite de « continuité » *(passage d'une variable discrète à une variable continue)***.**

Ainsi, pour faire le calcul avec la loi normale, on élargit de 0,5 de part et d'autre l'intervalle souhaité par la loi binomiale *(intervalle donné sous la forme extrémités comprises)*

Calcul souhaité avec $B(40\,,0{,}4)$	Valeur approchée à calculer avec la loi normale
$P(0<X<25)=P(1\leqslant X\leqslant 24)$	
$p(X\leqslant 15)=p(X=0)+\ldots+p(X=15)$	
$P(X\geqslant 12)$	

Remarque : Lorsque n est très grand, la correction de continuité a moins d'importance.

Exercice 19 :

On suppose que 5 % des pièces livrées présentent le défaut A. On prélève avec remise 400 pièces du stock. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 400 pièces prélevées au hasard dans la production, associe le nombre de pièces présentant le défaut A.

1) Quelle est la loi suivie par Y ?

2) On approche la loi de Y par une loi normale. Quels sont les paramètres de cette loi normale ?

3) On note Z la variable aléatoire suivant cette loi normale. Déterminer la probabilité que le nombre de pièces défectueuses soit inférieur ou égal à 10.

Pour répondre à cette question on calculera $P(Z \leq 10{,}5)$.

Exercice 20 :

Le but de cet exercice est l'étude statistique du diamètre des feuilles d'une plante médicinale au moment où une résine pharmaceutique les utilise dans la préparation d'un médicament.

Seules les feuilles dont le diamètre est inférieur à 8 cm sont utilisables.

La probabilité p qu'une feuille prise au hasard soit utilisable est 0,64.

On prélève par tirage au hasard un échantillon de 100 feuilles. La production est suffisamment importante pour que les tirages de 100 feuilles soient assimilés à des tirages avec remise. On désigne par Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon aléatoire de 100 feuilles associe le nombre de feuilles utilisables.

1) Justifier le fait que Y suit une loi binomiale, préciser ses paramètres.

2) On veut approcher la loi de la variable discrète Y par une loi normale, on désigne par Z la variable aléatoire suivant cette loi.

Quels sont les paramètres de cette loi normale ?

3) On prélève un échantillon aléatoire de 100 feuilles. Calculer la probabilité des événements suivants :

a) " le nombre de feuilles utilisables est strictement inférieur à 70", c'est à dire $P(Z \leq 69{,}5)$.

b) " le nombre de feuilles utilisables est strictement supérieur à 60", c'est à dire $P(Z \geqslant 60{,}5)$.

Espérance et variance

Exercice 21 :

On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y telles que $E(X)=2$, $V(X)=1$, $E(Y)=4$ et $V(Y)=2$.
Déterminer les paramètres des lois de $aX+b$, $X+Y$ et $X-Y$

Exercice 22 :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $B(n;p)$.
Montrer que $E(X)=np$

Exercice 23 :

n hommes et n femmes dansent par deux et forment une paire aléatoirement.
Soit X_i la variable binaire telle que $X_i=1$ si le ième homme danse avec sa femme ($X_i=0$ sinon)
1) Calculer $P(X_i=1)$ et $P(X_i=0)$
2) Calculer $E(X_i)$
3) Exprimer D_n en fonction des variables aléatoires X_i .
4) Quelle est l'espérance du nombre de couples D_n qui dansent ensemble parmi les n couples présents ?
5) Cette espérance augmente-t-elle avec n ?

Théorème de la limite centrée

Exercice 24 : :

Retrouver les paramètres du théorème de la limite centrée en utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance.

Exercice 25 :

On lance un dé honnête 100 fois, de façon indépendante.
On note S_{100} la variable aléatoire correspondant à la somme totale des points obtenus.

1) On note X_i la variable aléatoire représentant le nombre de points obtenus au i-ème lancer . Déterminer la loi de probabilité de X_i . En déduire que $E(X_i)=3{,}5$ et $V(X_i)=\dfrac{35}{12}$.

2) Exprimer S_{100} en fonction des variables aléatoires X_i .

3) En utilisant le théorème de la limite centrée, on peut approcher S_{100} par une variable aléatoire Z suivant une loi normale.
Déterminer les paramètres de cette loi normale.

4) Quelle est la probabilité que la somme totale des points obtenus soit comprise entre 300 et 400 ?

Exercice 26 :

On considère une urne contenant 12 boules rouges, 12 boules bleues et 26 boules noires indiscernables au toucher.
Un jeu consiste à tirer 50 fois de suite dans cette une.
A chaque tirage, on gagne 2 euro si la boule est rouge, 1 euro si la boule est bleue et on perd 3 euros si la boule est noire.
On note G_{50} la variable aléatoire correspondant au gain obtenu suite aux 50 tirages.

1) On note X_i la variable aléatoire représentant le gain obtenu au i-ème tirage . Déterminer la loi de probabilité de X_i . En déduire que $E(X_i)=-0{,}84$ et $V(X_i)=5{,}17$.

2) Exprimer G_{50} en fonction des variables aléatoires X_i .

3) En utilisant le théorème de la limite centrée, on peut approcher G_{50} par une variable aléatoire Z suivant une loi normale.
Déterminer les paramètres de cette loi normale.

4) Quelle est la probabilité que le joueur gagne de l'argent ?