

Exercice 1

On considère f définie sur \mathbb{R} par : $f(t) = 1$ sur $[0; \pi]$ et $f(t) = -1$ sur $]\pi; 2\pi[$. De plus f est une fonction 2π -périodique.

1) Dessiner f sur $[-\pi; 2\pi]$

2) Calculer $a_0 = \frac{1}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dt$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $a_n = \frac{2}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos(n\omega t) dt$

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $b_n = \frac{2}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin(n\omega t) dt$

On appelle $S(t) = a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ la série de Fourier associée à f

5) Exprimer la somme partielle : $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^5 a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$

6) Calculer le carré de la valeur efficace de f , noté $V_{eff(f)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t) dt$

7) En utilisant l'égalité due au mathématicien Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836) qui démontre que

$$V_{eff(S_5)}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \times \sum_{n=1}^5 a_n^2 + b_n^2, \text{ calculer } V_{eff(S_5)}^2$$

8) Montrer que le rapport $\frac{V_{eff(S_5)}^2}{V_{eff(f)}^2}$ est proche de 1.