Exercice 2

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = 1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et $f(t) = -1$ sur $]\frac{\pi}{2}; \pi[$. De plus f est une fonction paire et $2\pi-$périodique.
1) Dessiner f sur $[-\pi; 2\pi]$

2) Calculer $a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \times \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\, dt$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $a_n = \dfrac{2}{2\pi} \times \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos(n\omega t)\, dt$

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $b_n = \dfrac{2}{2\pi} \times \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin(n\omega t)\, dt$

On appelle $S(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ la série de Fourier associée à f

5) Exprimer la somme partielle : $S_5(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$

6) Calculer le carré de la valeur efficace de f, noté $V^2_{eff(f)} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t) dt$

7) En utilisant l'égalité due au mathématicien Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836) qui démontre que $V^2_{eff(S_5)} = a_0^2 + \dfrac{1}{2} \times \displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n^2 + b_n^2$, calculer $V^2_{eff(S_5)}$

8) Montrer que le rapport $\dfrac{V^2_{eff(S_5)}}{V^2_{eff(f)}}$ est proche de 1.