

## Exercice 3

On considère  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(t) = 2$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}]$  et  $f(t) = 0$  sur  $]\frac{\pi}{2}; \pi[$ . De plus  $f$  est une fonction paire et  $2\pi$ -périodique.

1) Dessiner  $f$  sur  $[-\pi; 2\pi]$

2) Calculer  $a_0 = \frac{1}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dt$

3) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $a_n = \frac{2}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cos(n\omega t) dt$

4) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $b_n = \frac{2}{2\pi} \times \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \sin(n\omega t) dt$

On appelle  $S(t) = a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$  la série de Fourier associée à  $f$

5) Exprimer la somme partielle :  $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^5 a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$

6) Calculer le carré de la valeur efficace de  $f$ , noté  $V_{eff(f)}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t) dt$

7) En utilisant l'égalité due au mathématicien Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755-1836) qui démontre que

$$V_{eff(S_5)}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \times \sum_{n=1}^5 a_n^2 + b_n^2, \text{ calculer } V_{eff(S_5)}^2$$

8) Montrer que le rapport  $\frac{V_{eff(S_5)}^2}{V_{eff(f)}^2}$  est proche de 1.