chapitre: Probabilités conditionnelles

1- Rappels

Vous pouvez réviser ce que vous avez fait en seconde et en première ou consulter le résumé disponible sur la page "Probabilités conditionnelles" (c'est la page où vous avez le lien vers cette page).

2- Définition et premières propriétés

2-1 Définition

<u>Définition</u>

Soit Ω un ensemble muni d'une probabilité et A un événement tel que : $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B de Ω, on définit la probabilité de B sachant A par :

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

<u>Remarques</u>

- $P_A(B)$ est la probabilité de B sachant que A s'est réalisé.
- Vous pouvez rencontrer l'ancienne notation : $P_A(B) = P(B|A)$ (la barre verticale se lit : "sachant").

Exemple commenté n°1

On lance un dé équilibré. L'univers Ω est l'ensemble de tous les cas possibles muni de l'équiprobabilité : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$.
Soit l'événement A = "un nombre pair sort" $A = \{2;4;6\}$
et B = "un nombre divisible par 3 sort" $B = \{3;6\}$.

Comme Ω est muni de l'équiprobabilité, on aura :

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(A \cap B) = \frac{card(A \cap B)}{card(\Omega)} = \frac{1}{6}$$

Nous avons deux méthodes pour déterminer $P_A(B)$

1. Par définition : $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{6} \times 2 = \dfrac{1}{3}$.
2. En utilisant le sens d'une probabilité conditionnelle :
Ici c'est la probabilité d'avoir obtenu un nombre divisible par 3 sachant qu'on a obtenu un nombre pair. Donc : $P_A(B) = \dfrac{1}{3}$.

2-2 Propriétés des probabilités conditionnelles

Propriété

Soit Ω un univers muni d'une probabilité P et A un événement tel que : $P(A) \neq 0$.
L'application qui à tout événement B de Ω associe $P_A(B)$ est une probabilité sur Ω (c'est une autre probabilité que P). En particulier on a :

- $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.

De plus :

- $P_A(A) = 1$.
- et si A et B sont incompatibles alors $P_A(B) = 0$.

Démonstration

Pour montrer que P_A est une probabilité sur Ω, il faut montrer que :

(1) $\quad 0 \leqslant P_A(\{x\}) \leqslant 1$ pour tout $x \in \Omega$.

(2) $\quad \sum_{x\in\Omega} P_A(\{x\}) = 1$.

(1) $\quad P_A(\{x\}) = \dfrac{P(A\cap\{x\})}{P(A)}$ par définition.

- Donc $P_A(\{x\}) \geqslant 0$.

- Comme $A\cap\{x\} \subset A$, donc $P(A\cap\{x\}) \leqslant P(A)$, ce qui signifie que $\dfrac{P(A\cap\{x\})}{P(A)} \leqslant 1$ et donc $\quad P_A(\{x\}) \leqslant 1$.

(2) On remarque que si $x \notin A$ alors $A\cap\{x\} = \emptyset$ et donc $P(A\cap\{x\}) = 0$

D'où $\sum_{x\in\Omega} P_A(\{x\}) = \sum_{x\in A} P_A(\{x\}) = \sum_{x\in A} \dfrac{P(A\cap\{x\})}{P(A)} = \dfrac{1}{P(A)} \sum_{x\in A} P(\{x\})$
(car si $x \in A$ alors $A\cap\{x\} = \{x\}$)

Donc $\sum_{x\in\Omega} P_A(\{x\}) = \dfrac{1}{P(A)} \times P(A) = 1$.

CQFD

3 - Arbre de probabilités

Un arbre de probabilités est un moyen efficace pour résoudre un problème en utilisant les probabilités conditionnelles. La facilité de la méthode provient du fait que l'on visualise facilement les formules des probabilités conditionnelles à condition de bien savoir ce que représente chaque branche.

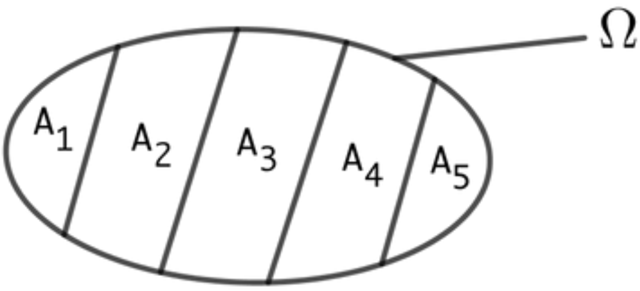
3 - 1 Définition d'une partition de l'ensemble Ω.

<u>Définition</u>

Une partition de l'ensemble Ω muni d'une probabilité $\mathcal{P}$ est un ensemble de parties A_1, $A_2, \ldots, A_n$ de Ω telles que:

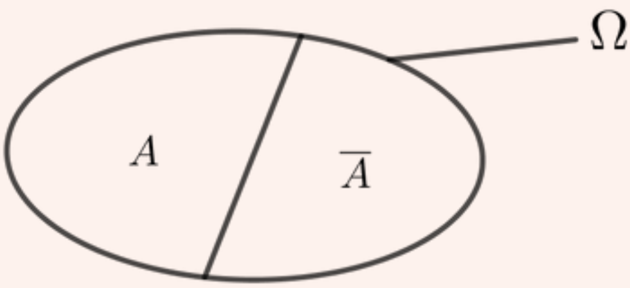
- Pour tout i : $P(A_i) \neq 0$;
- Les A_i sont deux à deux disjoints;
- $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Illustration

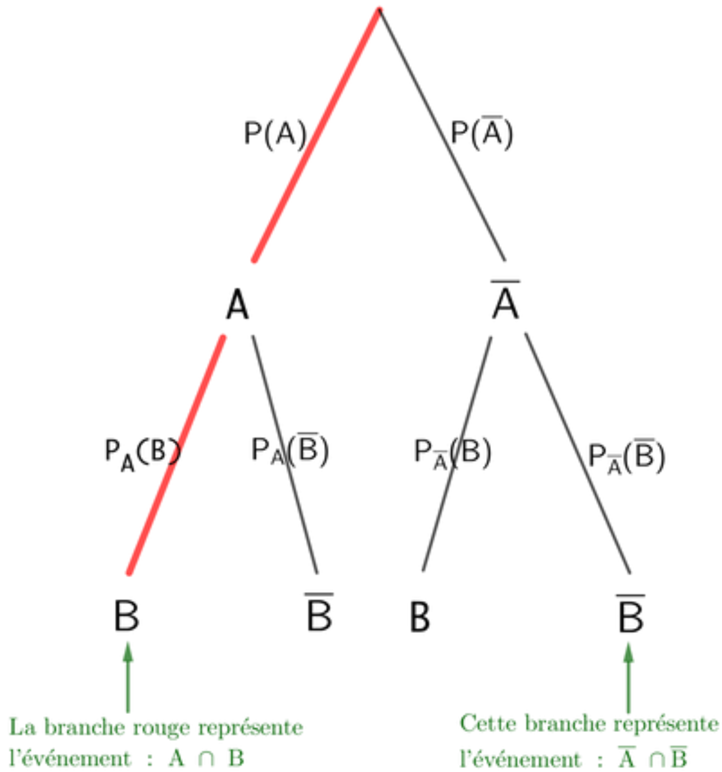


Remarques

Si A est une partie de Ω telle que : $0 < P(A) < 1$ alors les événements A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω. On peut la dessiner ainsi :



3 - 2 Arbre de probabilités dans le cas d'une partition à deux événements.



- Sur chaque branche on marque la probabilité de l'événement en bout de branche conditionnée par l'événement du nœud.
- Un chemin correspond à l'intersection des événements qui le composent (voir l'événement $A \cap B$ en gras et en rouge sur la figure).
- Par définition, $P(A \cap B) = P_A(B).P(A)$, donc la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
- Par construction, dans un arbre de probabilités, la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est toujours 1.

Conséquence de l'arbre

La formule des probabilités totales

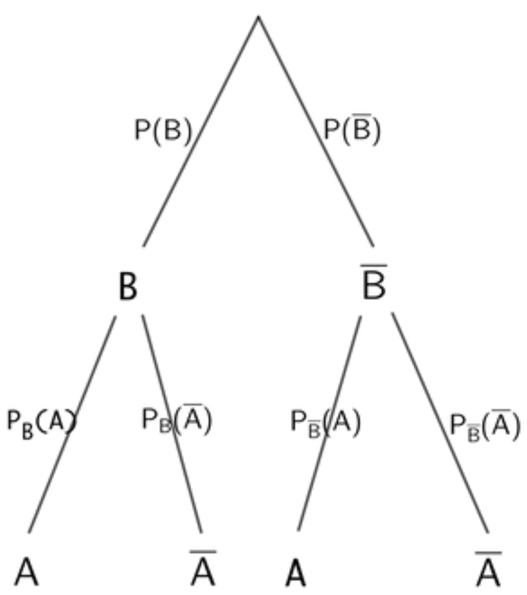
Dans le cas d'une partition à deux événements A et $\overline{A}$ de Ω :

$$P(B) = P_A(B).P(A) + P_{\overline{A}}(B).P(\overline{A})$$

On retient cette formule en regardant l'arbre : " La probabilité de B est la somme des probabilités des branches aboutissant à B ".

Remarque

lorsqu'on connaît entièrement un arbre comme celui de la figure précédente, on sait retrouver l'arbre "inverse" suivant :



- Pour trouver $P(B)$ on utilise la formule des probabilités totales à l'aide de l'arbre précédent.

- Pour trouver $P_B(A)$ on écrit que:

$$P(A \cap B) = P_A(B).P(A) = P_B(A).P(B)$$

Donc : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Exercice 1 : On extrait au hasard, d'un stock de pièces métalliques, l'une d'entre elles. Ce stock est issu pour 2/3 d'une fabrication F_1 et pour 1/3 d'une fabrication F_2. On sait que 20% des pièces de F_1 présente un défaut et 10% des pièces de F_2. On note :

- $F_1 =$ " La pièce vient de la fabrication F_1 ".
- $F_2 =$ " La pièce vient de la fabrication F_2 ".
- $D =$ " La pièce a un défaut ".

1°) On veut calculer $P(D)$.

a) Donner $P(F_1)$ et $P(F_2)$.

b) Donner $P_{F_1}(D)$ et $P_{F_2}(D)$.

c) En construisant l'arbre de probabilités correspondant, calculer $P(D)$.

2°) Sachant que la pièce extraite est sans défaut, quelle est la probabilité qu'elle provienne de F_1 ?

4- Indépendance

4-1 Définition.

Définition

Deux événements A et B sont dits indépendants lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Conséquence

Soit A un événement tel que : $P(A) \neq 0$. On a l'équivalence :

$$\left(\text{A indépendant de B}\right) \Leftrightarrow \left(P_A(B) = P(B) \right)$$

Démonstration

A indépendant de B

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$\Leftrightarrow P_A(B) \times P(A) = P(A) \times P(B)$

$\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$ (On peut simplifier par $P(A)$ car $P(A) \neq 0$)

CQFD

Remarque

Cela signifie que l'on pourrait prendre comme définition : A est indépendant de B lorsque $P_A(B) = P(B)$

Autrement dit, le fait de savoir que A s'est réalisé n'a pas de conséquence sur la probabilité que B se réalise !